

MATEMATICA E COMPETENZE TRASVERSALI

Oppi

INSEGNARE PER PROBLEMI ATTRAVERSO I
PROBLEMI

Rosa Iaderosa – 2 febbraio 2024

Il ruolo dei problemi nella disciplina matematica

Tutti i concetti più rilevanti su cui si articola la disciplina matematica ci appaiono oggi organizzati in un sistema teorico rigorosamente formalizzato, metodi, strumenti, oggetti e relazioni tra questi, all'interno della matematica, hanno una rigorosa sistemazione nelle varie teorie di riferimento.

Eppure, questo rilevante impianto culturale è nato da problemi importanti che sono stati tappe e pietre miliari nello sviluppo della teoria.

Lo sviluppo e la ricerca in matematica procedono attraverso le attività di indagine su problemi che via via vengono posti, a partire da quelli precedentemente risolti. Esistono anche *problemi aperti*, non ancora risolti, oppure *problemi impossibili*, su cui si è indagato per molto tempo, fino a *dimostrare* che sono impossibili...

E nella scuola...

Ma gli studenti che si avvicinano sin da piccoli alla matematica, riescono a percepire questo aspetto importantissimo di **ricerca della conoscenza** e di costruzione, o meglio, **ri-costruzione** personale della conoscenza, attraverso l'attività di porsi problemi e cercare di risolverli?

Imparare la matematica a scuola

Probabilmente il sistema teorico al quale la scuola deve avvicinare i ragazzi, per come è costituito, e per la sua complessità, spaventa il docente, che vede nitidamente le difficoltà e la grande mole di conoscenze che sono necessarie a questa disciplina.

Molto spesso il tempo necessario per lavorare su concetti, ma anche per promuovere conoscenze e abilità necessarie alla costruzione di competenze, sembra inadeguato; i ritmi della scuola, e dei suoi processi istituzionali, compresi quelli valutativi, non concedono tregua...

La continuità, necessaria in un percorso di apprendimento, spesso viene interrotta da scadenze, pause di ogni tipo...

La risposta della scuola

Spesso ci si adegua ai *tempi della scuola*, privilegiandoli a *quelli dell'apprendimento*, spesso l'urgenza di consolidare nozioni e tecniche risulta prioritaria rispetto ad attività che lascerebbero il soggetto libero di *pensare, esplorare, congetturare*, da solo o insieme ai suoi coetanei, alla ricerca di risposte significative e di *un insegnamento che si innesti su queste esperienze, al fine di divenire realmente efficace*.

Inoltre...

sarebbe necessario **far emergere alcuni problemi**, anche se storicamente sono già stati affrontati e risolti:

ciò costituirebbe la **motivazione** all'indagine, all'esplorazione, alla formulazione di ipotesi e congetture...

Non è possibile ricostruire tutto il percorso della conoscenza matematica, ma è proprio la formalizzazione attuale del sistema teorico già costituito che spesso è un ostacolo a percorsi di apprendimento significativi...

un approccio storico-epistemologico, oppure semplicemente **a partire da un problema**, almeno in una fase iniziale dei percorsi didattici può essere di stimolo ad apprendimenti efficaci

Nonostante le difficoltà...

Il docente convinto della necessità di una didattica che valorizzi il coinvolgimento attivo degli studenti può fare una importante scelta:

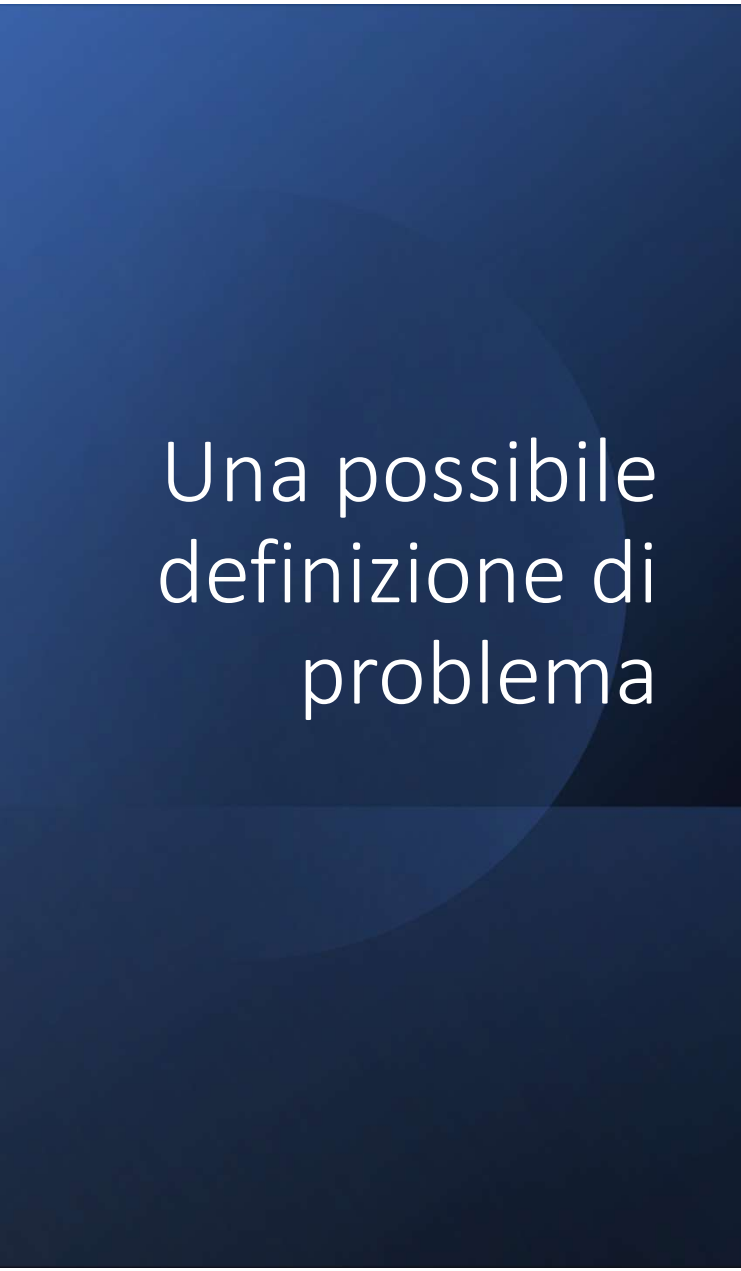
INSEGNARE PER PROBLEMI

Che cos'è un problema

“Un problema è un compito per cui:

- l'individuo o il gruppo che si confronta con esso vuole o ha bisogno di una soluzione
- non c'è una procedura immediatamente accessibile che garantisca o determini in modo completo le soluzioni
- l'individuo o il gruppo devono fare uno sforzo per trovare una soluzione”

(Lester)



Una possibile
definizione di
problema

Una situazione «nuova» in cui metto
in atto le conoscenze e le abilità che
possiedo per arrivare con una
strategia personale alla soluzione

Come utilizzare il problema?

Il problema è un fondamentale strumento per produrre nuova conoscenza.

A scuola può servire:

- per introdurre nuove conoscenze e concetti, motivandoli....
- per testare le conoscenze acquisite e le competenze...
- *per “esplorare”...*

Gli *ambienti di apprendimento* in una prospettiva costruttivista

Se **la conoscenza è un'attiva e personale costruzione di significato** attraverso meccanismi di assimilazione e accomodamento, un docente può offrire allo studente stimolo ed indirizzamento, ma non può determinare direttamente il suo apprendimento:

“l’istruzione non è causa dell’apprendimento, essa crea un contesto in cui l’apprendimento prende posto come fa in altri contesti”

(Wenger, 1998, p.266) 4.

Quindi l’apprendimento va visto piuttosto come un processo complesso, continuo e pervasivo, che vede l’insegnamento come una delle tante risorse possibili.

IL PROBLEMA SECONDO BROUSSEAU

E' possibile comunicare e trasferire tutte le strategie di risoluzione alla classe? E agli allievi più deboli?

Nuovo obiettivo del problema può diventare non lo sviluppo di tecniche euristiche, ma la **costruzione di nuove conoscenze attraverso la risoluzione di problemi**

Guy Brousseau

Facciamo riferimento alla **teoria di Guy Brousseau delle situazioni didattiche**, in cui si definiscono situazioni e modalità che consentono di costruire conoscenza con gli allievi, in matematica.

Porre un problema significa trovare una situazione problematica con la quale l'allievo intraprende una serie di scambi relativi ad una stessa questione che costituisce "ostacolo" per lui, e sulla quale si appoggerà per appropriarsi, o costruire una conoscenza nuova.

L'apprendimento che si fonda sullo studio dello sviluppo delle conoscenze in termini di *ostacoli*

Porre un problema consiste nel trovare una situazione con la quale l'allievo intraprende una serie di scambi relativi ad una questione che costituisce “ostacolo” per lui, e sulla quale si appoggerà per appropriarsi o costruire una conoscenza nuova.

In questa ottica...

C'è una insolita (per la scuola!) valorizzazione dei **conflitti cognitivi, delle difficoltà, degli errori...**

Fondamentale in una didattica per problemi è un contratto didattico che distingue con chiarezza i *momenti di difficoltà* durante la costruzione di nuova conoscenza dai *momenti valutativi*

Aspetti pedagogici della didattica del problema

Molto importante, in un'ottica costruttivista, è la **devoluzione** della risoluzione di un problema alla classe:

il docente è organizzatore di situazioni didatticamente significative, in cui si pone il problema e si lascia il più possibile all'interazione tra pari la ricerca di soluzioni.

La discussione di classe contribuisce sia alla costruzione del sapere, sia alla istituzionalizzazione di quanto è stato “scoperto”

La gestione della classe

Gli allievi devono maturare la convinzione che la prestazione attesa più importante *non è la risposta esatta ad una domanda, ma il processo di risoluzione.*

L'intera classe e l'insegnante si pongono in un *atteggiamento di ricerca*, per il quale sono essenziali l'esplicitazione, la discussione, quindi il linguaggio e la comunicazione.

In questa ottica

La risoluzione di problemi ha carattere **"costruttivo"** .

In particolare, la necessità di andare oltre schemi esperiti ed interiorizzati per costruire nuovi collegamenti tra nozioni o schemi e investirli opportunamente in un percorso che conduce alla soluzione e al suo controllo deve forzare l'esplicitazione di questo percorso, con una multimodalità di linguaggi

Allora, come si possono avvicinare gli allievi alla disciplina matematica, senza creare sin dall'inizio conflitti che appaiono incomprensibili, e che allontanano dal desiderio di sapere, di capire...?

L'unica soluzione è introdurre i concetti della matematica, e tutto quanto ne deriva, a partire da problemi fondamentali, che almeno inizialmente consentano allo studente di pensare, formulare risposte, soluzioni personali, discuterle, confrontarle con il «sapere sapiente», consolidato da millenni di ricerca da parte della mente umana

Almeno nel momento iniziale



il primo approccio a concetti e contenuti nuovi deve avvenire attraverso un problema.



La difficoltà, ma anche la professionalità del docente risiede nella sua capacità di individuare problemi adatti all'età dei suoi allievi, che la realtà ci propone, o la disciplina stessa ci presenta, e arrivare gradualmente a prime sistematizzazioni attraverso la ricerca, la manipolazione, la sperimentazione, la discussione, prima nel gruppo dei pari, poi nel gruppo classe, alla istituzionalizzazione della conoscenza emersa.

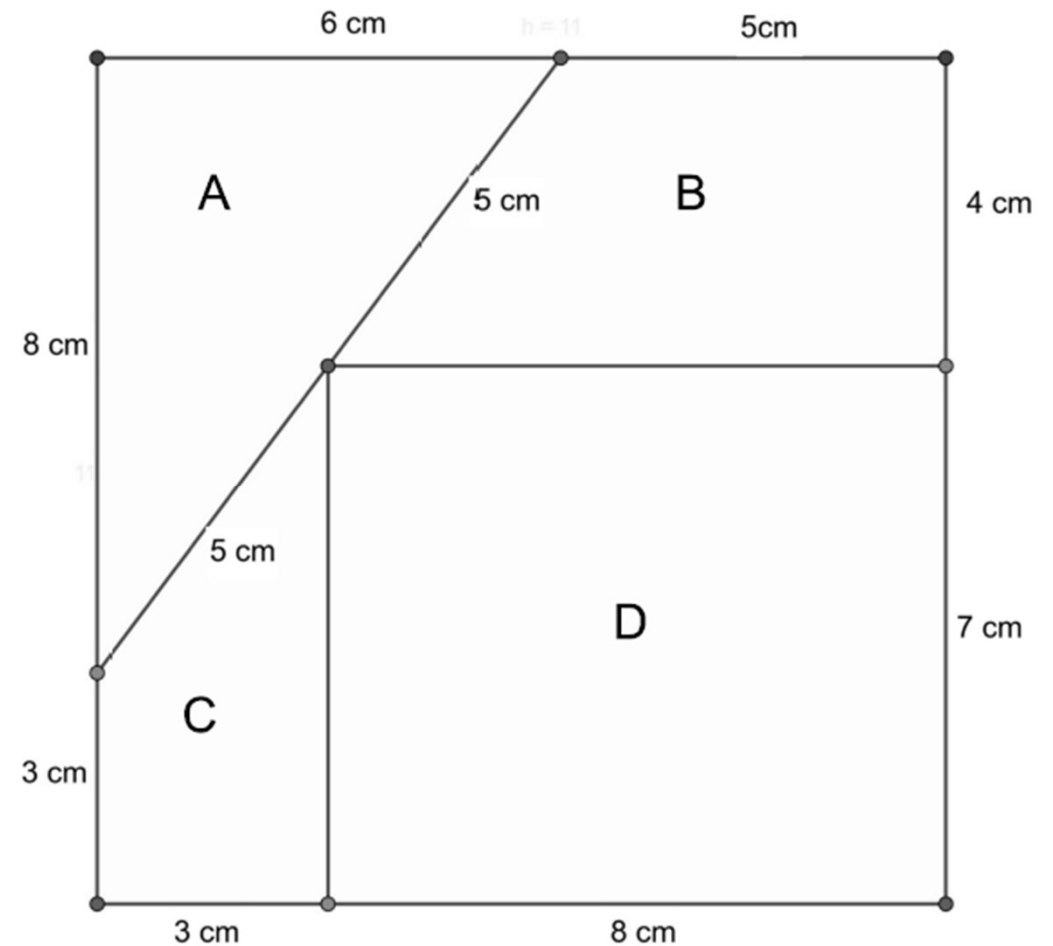
Prima di teorizzare...

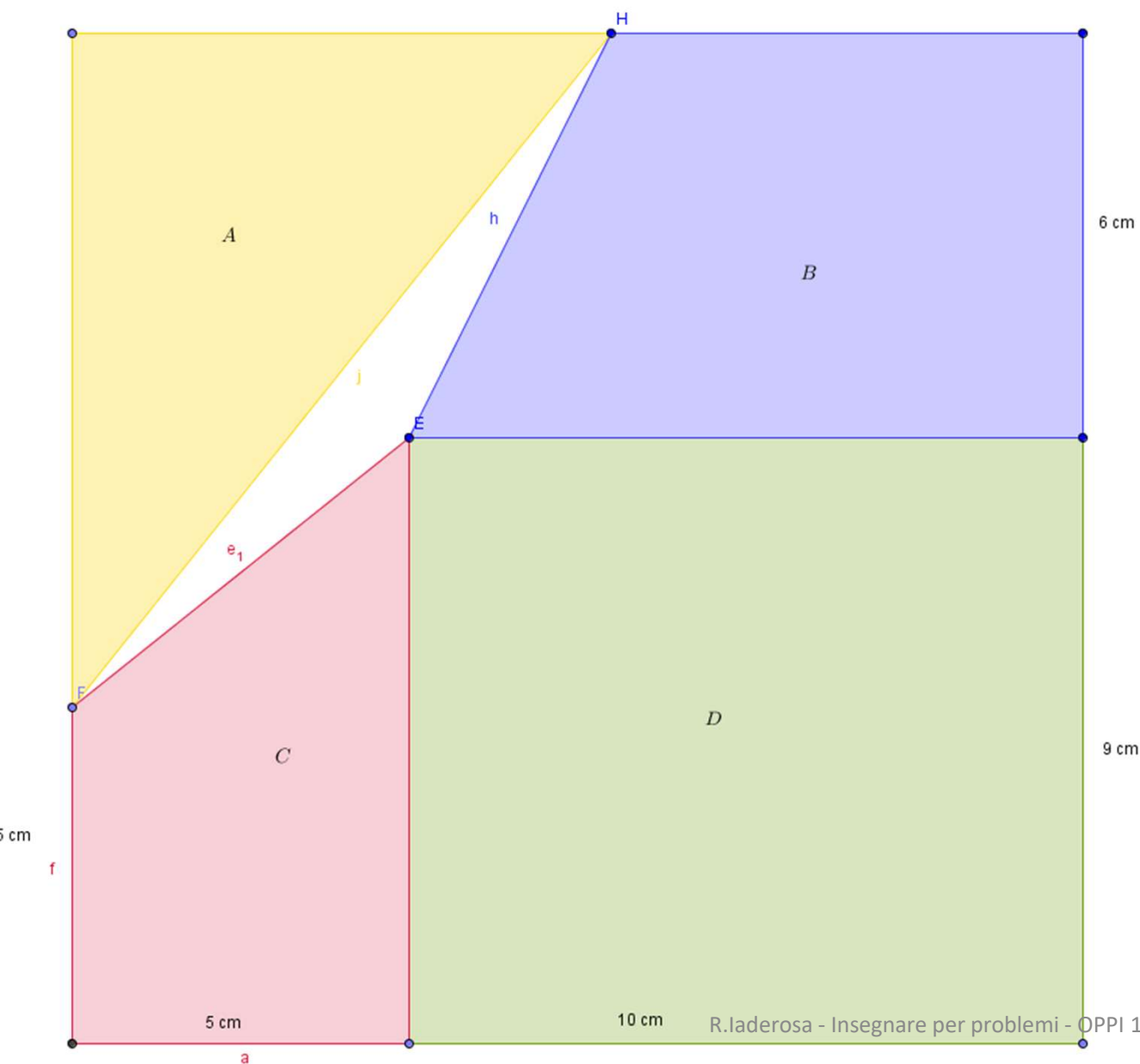
Partiamo da questo problema, finalizzato ad introdurre la necessità di costruire nella mente del soggetto il ***pensiero proporzionale***.

Cerchiamo di capire di che cosa si tratta dal problema stesso

IL PROBLEMA DEL PUZZLE

L'insegnante propone di ingrandire questo puzzle in modo che il lato che misura 4 cm ne misuri 6 nel puzzle ingrandito





La strategia additiva:
4cm → 6 cm

si rivela inefficace e non
corretta

Gli allievi possono autonomamente, per
tentativi, pervenire alla strategia
moltiplicativa, che porta al successo

Quale teoria didattica di riferimento?

La teoria delle situazioni

TDS elemento chiave del quadro teorico francese

Guy Brousseau

Le ipotesi alla base della TSD

Ipotesi psicologica

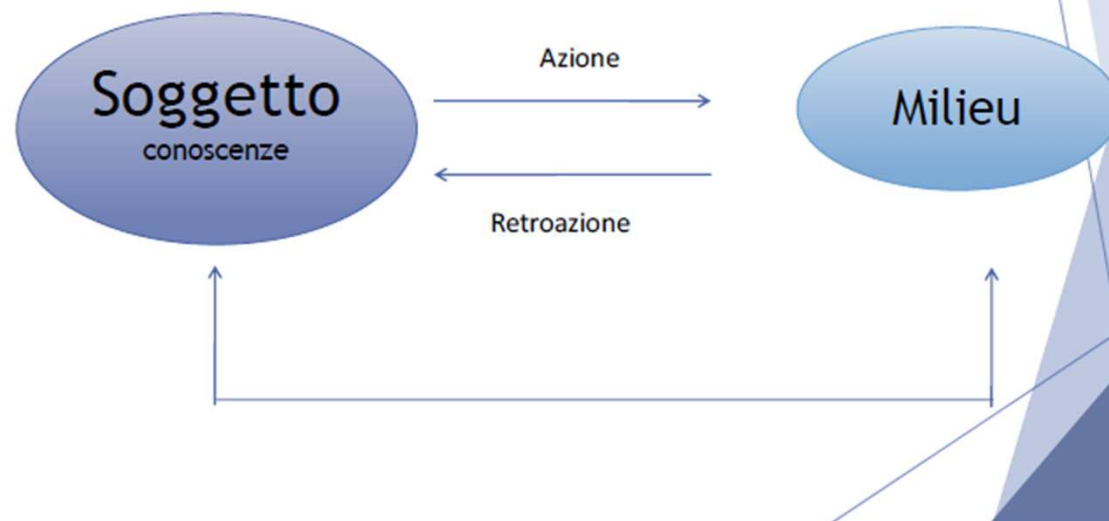
Si tratta di un'ipotesi che si riferisce in modo esplicito a Piaget e alla teoria 'costruttivista'

apprendimento per **adattamento**

*Il soggetto apprende per adattamento (assimilazione e accomodamento) a un **milieu** che produce conflitti, difficoltà e disequilibri.*

M.A. Mariotti,
ottobre 2017

Situazione di apprendimento



M.A. Mariotti, ottobre
2017

Ipotesi didattica

Un *milieu* privo di intenzioni didattiche è insufficiente per indurre in un soggetto tutte le conoscenze che la società richiede che lui apprenda.

È necessario che l'insegnante organizzi intenzionalmente il milieu per “insegnare un sapere”

Conseguenze

Tali ipotesi portano alla introduzione del costrutto teorico di situazione e alla distinzione tra:
Situazione didattica/ a-didattica

Nella teoria Brousseau individua tre differenti situazioni:

1. **a-didattica**: costituita dagli studenti e dall'oggetto della conoscenza, senza la presenza dell'insegnante che gioca un ruolo da regista. Gli allievi forniscono risposte in base alle esigenze che vengono suggerite dal milieu, realizzano i propri tentativi, verificano la loro efficacia. La motivazione è data dall'attività stessa, da quello che gli è stato proposto con quella situazione; solo se ci si interessa in prima persona della risoluzione del problema, secondo Brousseau, si costruisce conoscenza. Per giungere ad una nuova conoscenza, l'azione didattica si articola in sei diverse fasi: *devoluzione, implicazione, costruzione di conoscenza privata, validazione, socializzazione, istituzionalizzazione*.
2. **non-didattica**: l'insegnante e l'allievo non hanno rapporto con il sapere che non è specifico;
3. **didattica**: l'insegnante predispone l'ambiente affinché l'allievo apprenda; entrambe le figure sono consapevoli del loro ruolo e dell'evolversi della situazione: si è immersi nel contratto didattico.

Caratteristiche di una situazione a-didattica

Esiste una o più strategie possibili seppur inadeguate, basate sulle conoscenze precedenti degli allievi.

Esiste un 'milieu di validazione', ovvero la retroazione del milieu per mettere da sola di invalidare le strategie (errate = inadeguate)

La scelta dei dati è tale che le strategie additive siano inadeguate e sia possibile accorgersene solo quando si mette tutto insieme

L'insegnante può 'scompare' lasciando gli allievi da soli con il compito

Due fasi fondamentali

- La **fase di devoluzione** quando l'allievo fa proprio il problema proposto dall'insegnante : cerca la risposta per sé, per la propria soddisfazione personale e non per compiacere le attese del professore.

Quando la fase di devoluzione è completa, come fa l'allievo a sapere che ha costruito una *conoscenza matematica*, un Sapere?

- La **fase di istituzionalizzazione** quando l'insegnante gestisce il processo che trasforma risposte e conoscenze in SAPERE:
- De-contestualizzato
 - De-personalizzato
 - Generale ed applicabile ..

Quante persone in piazza del popolo la notte di capodanno

La notte di Capodanno a Roma, in Piazza del Popolo, per consuetudine si tiene un grande concerto che richiama persone in grande quantità.

Ci chiediamo quante persone possono realisticamente entrare nella piazza.

Dopo aver enunciato il problema, discutiamo su possibili strategie per dare una risposta. Anche i quotidiani si occupano di problemi analoghi, come possiamo vedere da un'immagine tratta da La Repubblica del 22 marzo 2010.



Il quotidiano suggerisce di tracciare un reticolato ideale, valutando approssimativamente quante persone possono stare in ciascun rettangolo del reticolo

Dal progetto
ministeriale M@tabel

L'approssimazione incontrata nel problema della piazza è legata solo al fatto che il luogo è irregolare oppure è insita nell'atto stesso del misurare?

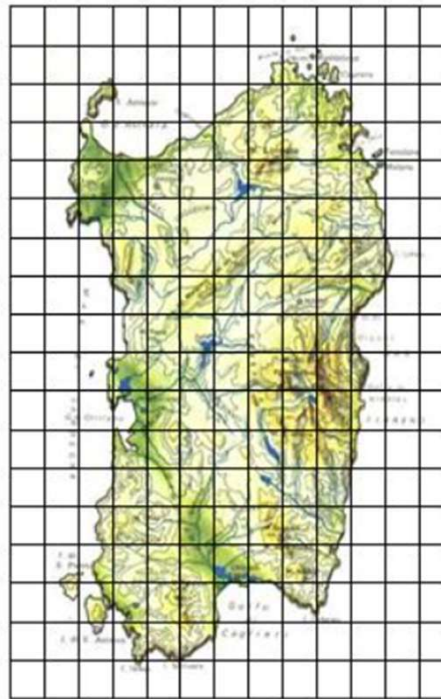
Anche dovendo misurare l'area di un rettangolo ci possiamo trovare di fronte al problema dell'approssimazione. Per esempio, un foglio in formato A4, le cui misure sono 21 cm e 29,7 cm, potrà essere quadrettato con una griglia di un centimetro di lato e avremo necessità di approssimare 29,7 per eccesso o per difetto. Nel primo caso (approssimando a 30 cm) si ha un errore lineare di 3 mm che diventano $3 \times 210 = 630 \text{ mm}^2$, nel secondo caso (approssimando a 29 cm) si ha un errore di 7 mm che diventano $7 \times 210 = 1470 \text{ mm}^2$.

Se poi l'approssimazione riguarda due dimensioni, l'errore aumenta.

E per finire... qual è l'area della Sardegna?

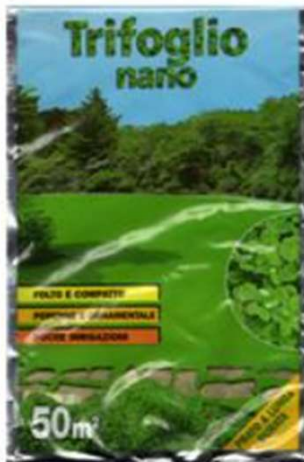
Un qualsiasi poligono può essere scomposto in triangoli, ma si apre un interessante problema se la figura da misurare è delimitata da un contorno curvilineo.

L'insegnante dirà agli alunni di ricoprire una mappa della Sardegna con un reticolato a quadretti tracciato su un foglio di acetato. Si otterrà una immagine di questo tipo:
(NB: i quadretti sono di 0,5 cm)



Gli alunni distinguono i quadrati del reticolato in tre categorie: i quadrati "terra", quando tutto il quadrato ricopre solo terraferma; i quadrati "terra-mare", quando il quadrato ricopre una parte di mare e una di terraferma; i quadrati "mare", quando tutto il quadrato ricopre solo mare. Gli studenti contano il numero dei quadrati nelle tre categorie. È opportuno che il reticolato sia disposto sulla mappa in modo da avere il massimo numero possibile di quadrati "terra". Quindi, se si assume come unità di misura un quadrato del reticolato, l'area della superficie della Sardegna risulta compresa tra due valori: il numero dei quadrati "terra" e il numero di questi addizionato al numero dei quadrati "terra-mare". L'insegnante si accerta che gli studenti comprendano il significato di queste disuguaglianze.

ALTRI STIMOLI



Proponiamo ai ragazzi un'attività nella quale si fornisce l'immagine di un terreno-giardino dalla forma irregolare e diciamo che vogliamo misurarne la superficie per comprare i semi da erba (che di solito si vendono in g/m^2).

Per effettuare questa misura i ragazzi useranno strategie diverse; probabilmente decideranno di scomporre la forma in figure note e misurarne i lati significativi. Faremo osservare che le misure differiranno per alcuni decimali. Sarà necessario pertanto approssimare e di nuovo ci troveremo di fronte ad errori che si trasmettono ingranditi nel calcolo dell'area.

Non è possibile far riscoprire tutta la matematica ai piccoli...

e nemmeno agli allievi più grandi.

Tuttavia le esperienze significative di ricerca e di discussione iniziale creano nella mente dei nostri allievi la consapevolezza dei problemi che hanno portato alla costruzione di conoscenze in matematica, e anche alle difficoltà, agli inevitabili conflitti, (o ostacoli epistemologici) che si frappongono tra le semplici intuizioni e le risposte della disciplina

LA DIDATTICA PER PROBLEMI

la conoscenza matematica può essere quindi **ri-costruita** a partire da *situazioni a-didattiche*, e da problemi.

Il docente predispone problemi e risorse perché possa avvenire la *devoluzione* alla classe della costruzione di conoscenza.

Ciò si alterna poi a *situazioni didattiche*, in cui il sapere viene formalizzato e istituzionalizzato.

Ciò che gli allievi devono percepire, riconoscere, esperire, è questo continuo atteggiamento di ricerca, anche in situazioni non didattiche, e soprattutto imparare a distinguere i momenti di *ricerca attiva*, in cui possono liberamente esprimere i loro pensiero, da quelli che diventano *valutativi* in un percorso scolastico.