

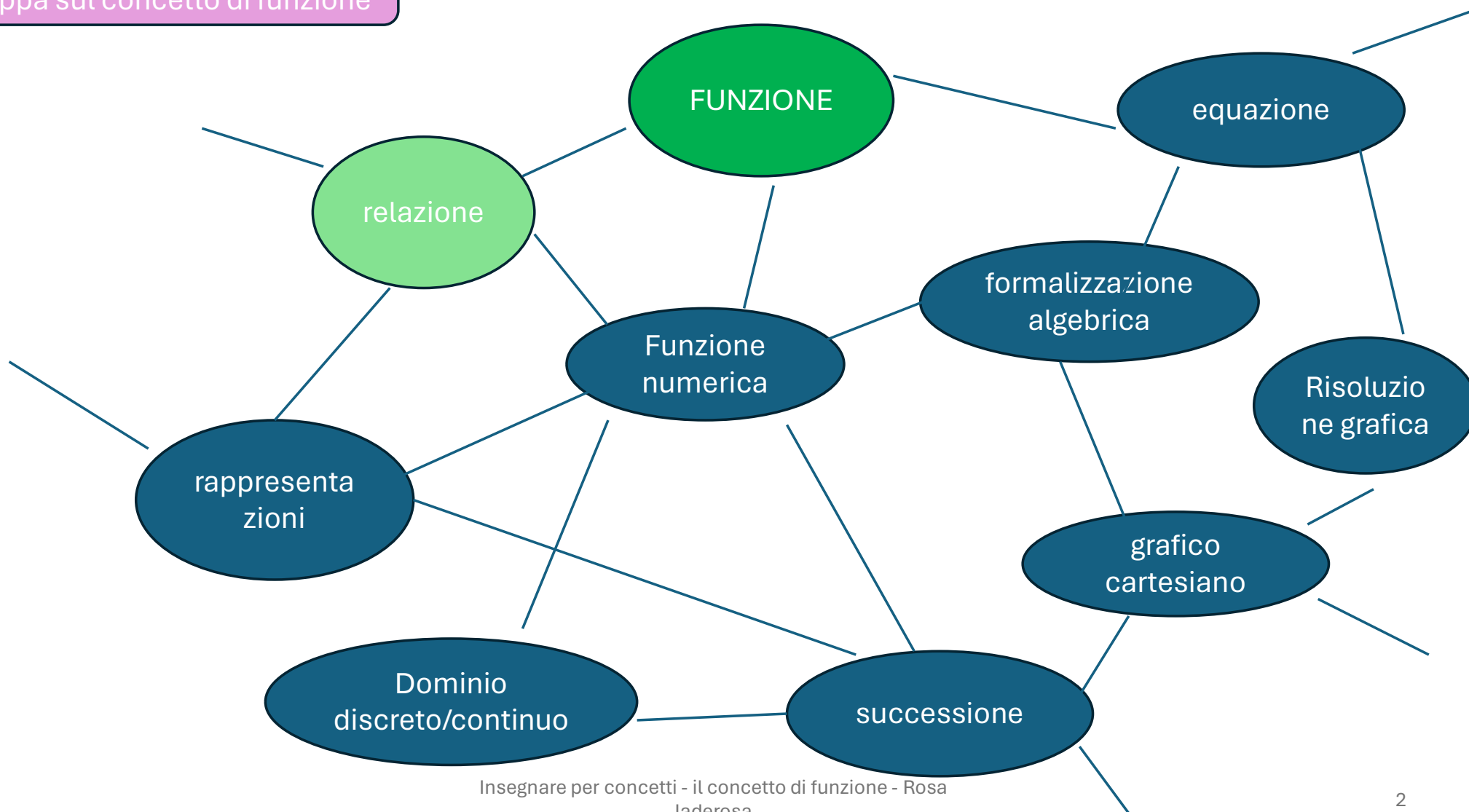


INSEGNARE PER CONCETTI

Alcuni spunti didattici sul concetto di funzione

Rosa laderosa – 25/03/2024

Frammento di una possibile
mappa sul concetto di funzione



La funzione come “oggetto” della matematica

Il moderno concetto di funzione è il frutto di un processo lungo e articolato che storicamente ha avuto origine soprattutto inizialmente dallo **studio di curve** che rappresentavano fenomeni. Successivamente si è fatta strada l'idea più astratta e generale di **relazione tra variabili**, concezione questa che ha condotto successivamente alla formalizzazione algebrica e alla visione ultima di un **particolare insieme di coppie ordinate**.

La funzione vista come relazione tra variabili

“Se una variabile y è collegata ad una variabile x in modo che qualsiasi sia il valore numerico assegnato a x c'è una legge secondo cui risulta determinato un unico valore di y , allora si dice che y è funzione della variabile indipendente x .”

(Dirichlet, 1837)

Questa definizione, più moderna, di Dirichlet, conduce alla visione di un concetto in cui è necessario cogliere «collezioni» di numeri che si succedono parallelamente tra dominio e codominio, secondo la relazione fissata. Ciò conduce anche all'introduzione dell'equazione come un aspetto particolare di questa variabilità (visione funzionale delle equazioni).

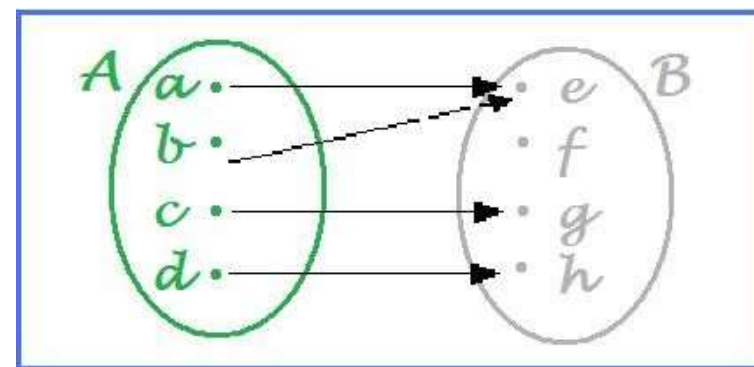
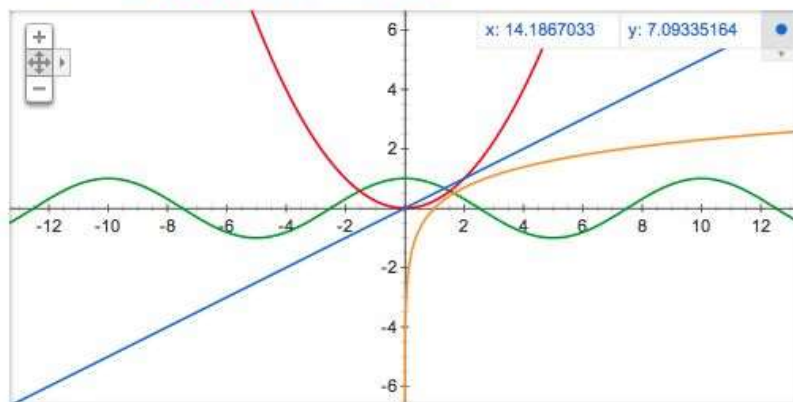
La funzione nella matematica attuale

Lo stratificarsi delle varie concezioni, anche molto diverse tra loro, ha fatto sì che **in un unico concetto** confluissero **più visioni** della funzione, e soprattutto **più rappresentazioni** di essa

(rappresentazione sagittale, rappresentazione cartesiana, formula algebrica, ecc.)

Si pone quindi il **problema di conciliare questi vari aspetti del concetto di funzione**, soprattutto nell'insegnamento, e questo problema a volte trae vantaggio da un approccio storico ai concetti.

Graph for $x/2$, $(x/2)^2$, $\ln(x)$, $\cos(\pi x/5)$



$$y = -5x^2 + 3x + 2$$

$$y = -2\sin(\ln x)$$

$$y = e^{\tan x} + 2x$$

Esempi di
rappresentazioni
della funzione

DALLE INDICAZIONI NAZIONALI UN' IMPORTANTE DECLINAZIONE NELLA COSTRUZIONE DEL CONCETTO

“Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un’attività più propriamente di **matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione**. L’alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, ...) e *le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema.*”

QUALI LE PROBLEMATICITA' di questo concetto e della sua **unificazione DAL PUNTO DI VISTA DIDATTICO?**

L'individuazione dei “nodi” didattici e delle problematiche nella costruzione di questo concetto così complesso, nell'ottica di un curriculum continuo, può essere guidata proprio dall'analisi di come esso si è evoluto storicamente

Aspetti nodali da analizzare dal punto di vista di un apprendimento significativo

□ il riconoscimento di variabili e costanti

(e conseguentemente il ruolo della lettera nella formalizzazione algebrica)

□ il coordinamento tra **vari registri di rappresentazione**

□ il **significato del grafico** cartesiano

□ **l'aspetto funzionale** delle equazioni

□ il **ruolo** fondamentale che le funzioni hanno **nella modellizzazione**.

Il coordinamento

Un apprendimento significativo si ottiene solo **imparando a coordinare i vari registri rappresentativi** (*Duval, 1987*)

Attraverso le varie teorie, sempre più complesse, si impara a **codificare, decodificare, interpretare, reinterpretare...**



Anche qui
dunque



l'utilizzo dei problemi per costruire
concetti

Obiettivi di apprendimento sul nucleo “Relazioni e funzioni” *(nel primo ciclo di istruzione)*

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.

$$y = ax \quad (\text{il significato e il ruolo di } a) \dots$$

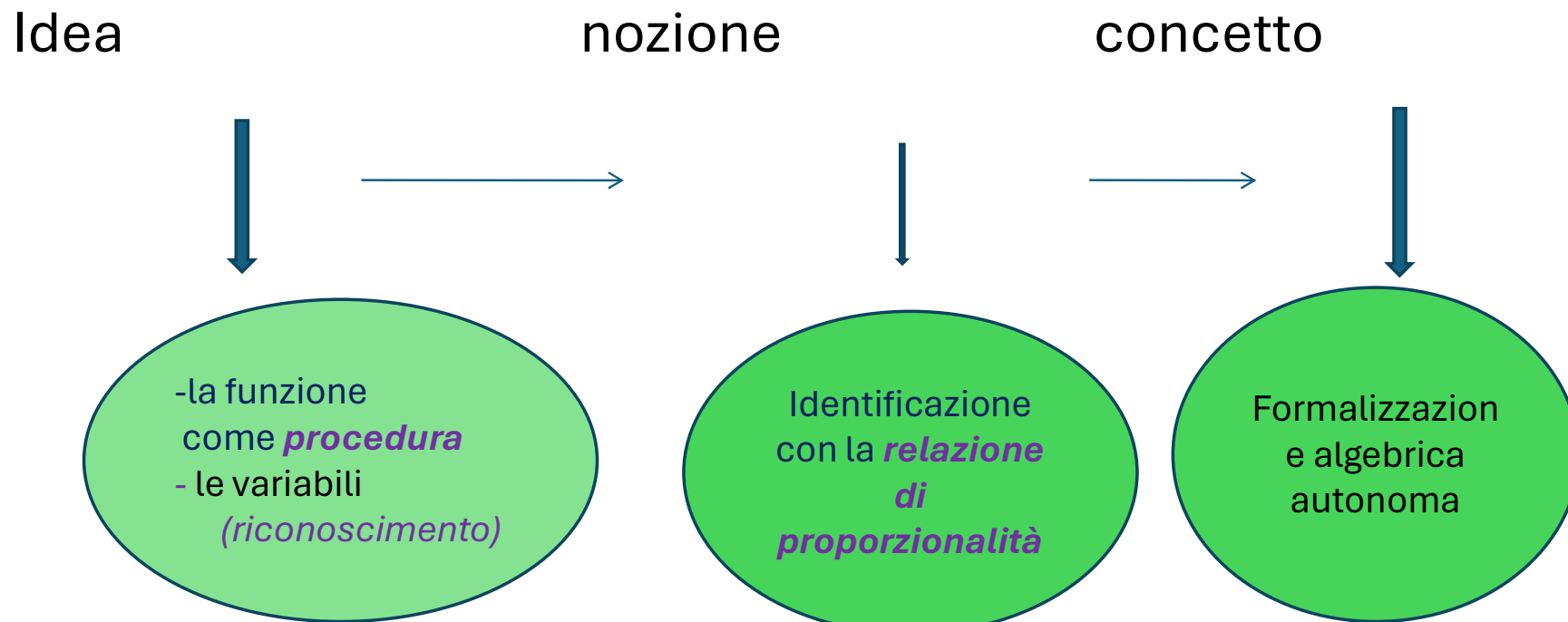
- Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$, $y=2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità.
- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

legame con le
equazioni...

Il rischio della
frammentarietà

Insegnare per concetti - il concetto di funzione - Rosa
Iaderosa

Evoluzione del concetto di funzione dal punto di vista dell'insegnamento

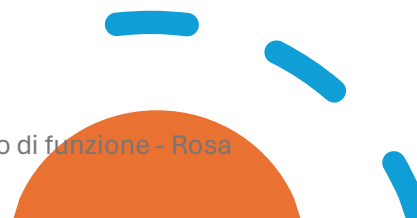
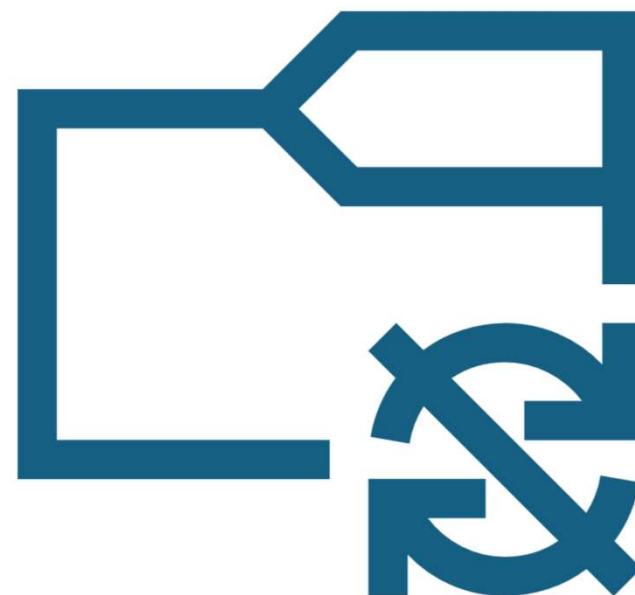
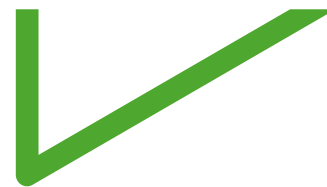


In una didattica per problemi

Occorrerebbe far passare gli allievi dall'apprendimento di un'*idea* di funzione, alla *nozione* più esplicita, e poi gradualmente a concettualizzarla nei suoi vari aspetti, coordinandoli, in modo che diventi **strumento di risoluzione di problemi**.

Evidentemente è questo in sintesi il grosso *nodo* da affrontare didatticamente

Quali problemi per
affrontare i nodi del
concetto di
funzione?



Per i più «piccoli» *(scuola primaria, secondaria di primo grado)*

Procedure – macchine (operatori) – regolarità numeriche e geometriche -

- trasformare i problemi in situazioni tali da suggerire agli allievi che
l'operatore agisce indefinitamente, su qualunque numero, o coppie di
numeri (cominciare quindi a distinguere tra l'*incognita* dalla *variabile*) ;
- utilizzare problemi (ad esempio inventando vari tipi di calcolatrice,...)
in cui la procedura richiede il riconoscimento di variabili e costanti;
- sollecitare nel problema la simbolizzazione spontanea delle variabili, e
osservarne le modalità (la x ...)

Per i più «grandi» *(scuola secondaria di primo e secondo grado)*

proporre problemi in cui una relazione espressa verbalmente possa essere trasformata in relazione simbolica dagli allievi, e che richiedano un utilizzo più avanzato di equazioni, sistemi lineari, grafici cartesiani,...



Tipologie di problemi sul concetto di funzione

- 
- Successioni: di numeri, di immagini, ...
 - Procedure (legami funzionali) in cui sia richiesto il controllo, contemporaneo o no, di variabili e costanti,...
 - Funzioni riconoscibili e interpretabili attraverso grafici cartesiani

.....

Due i punti nodali

- la comprensione del ruolo del simbolo letterale come variabile
(*abituare a cambiare i nomi delle variabili*)
- il grafico come rappresentazione sintetica di una relazione tra due grandezze variabili
(*esperienze dal basso*)

Il termine variabile ha un duplice significato:

- la grandezza variabile,
- i dati numerici correlati alla variabile che si osserva

http://www.scuolavalore.indire.it/nuove_risorse/rettangoli-e-fontane/

Esplorazione di un problema...

L'insegnante propone alla classe il seguente problema:

Due contadini si incontrano in un negozio di ferramenta: devono acquistare entrambi 40 m. di rete metallica necessaria a recintare i loro orti rettangolari. 'Che strano', dice il primo, 'la stessa lunghezza di rete da cinta quando il mio orto ha una superficie ben più grande del tuo!' 'Ma non dire sciocchezze' ribatte il secondo, 'se prendiamo entrambi 40 m di rete significa che i nostri due orti hanno la stessa area!'. Chi dei due ha ragione?

un bell'esempio sul significato di grafico cartesiano

...e la rappresentazione algebrica

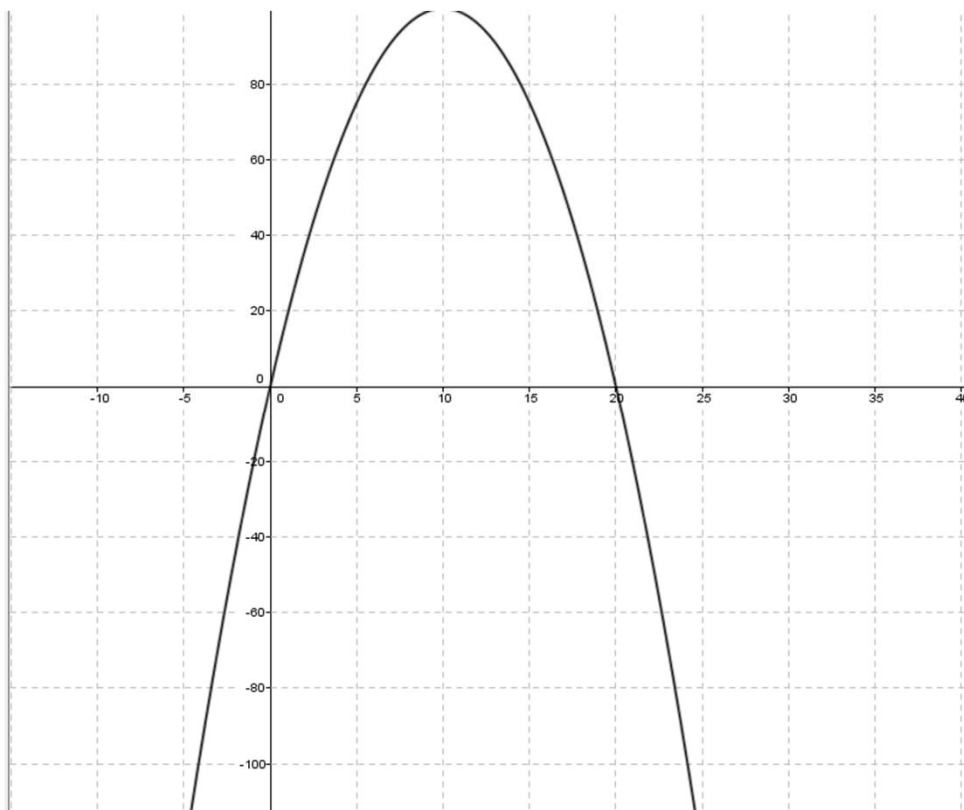
La descrizione matematica della variabilità si completa con la rappresentazione algebrica della funzione **Area**. A questo si giunge introducendo il simbolo x di variabile, seguendo le indicazioni della scheda 2, fino ad arrivare alla formula algebrica della funzione:

$$\text{Area}, \text{ ossia } y = x(20 - x).$$

Sarà anche possibile far notare agli studenti quali valori è possibile attribuire alla x e quali valori può restituire la y . Inoltre può essere opportuno usare anche la notazione:

$$\text{Area}(x) = x(20 - x).$$

Conica
c: $y = -x^2 + 20x$



La funzione area
dei rettangoli isoperimetrici:

$$y = x(90-x) = -x^2 + 90x$$

Che cosa rappresenta
questa curva?

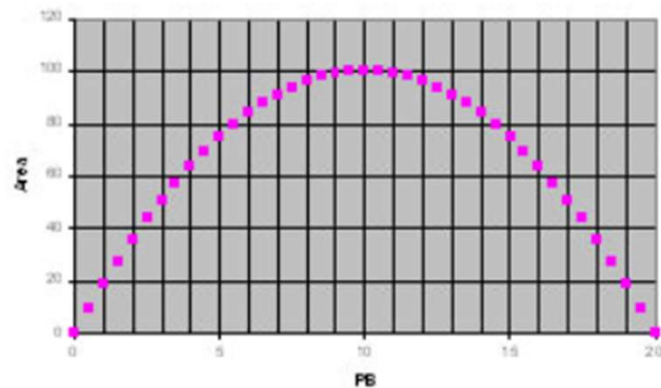
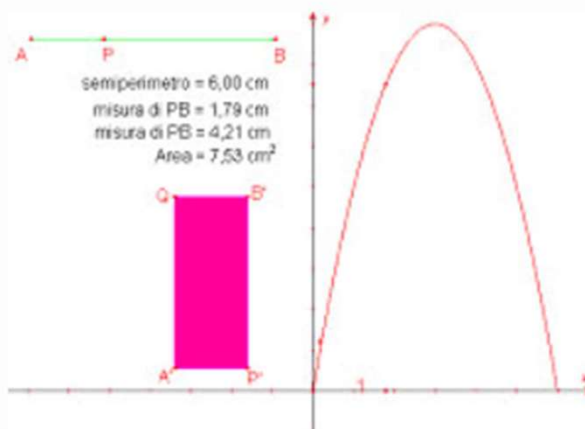


Figura 3



al variare del punto P sullo slider
variano le lunghezze correlate dei
due lati del rettangolo: x e $(20-x)$.
Questa variazione determina una
funzione area di tipo quadratico, il
cui grafico cartesiano è una
parabola dotata di punto massimo

2. Ancora fontane

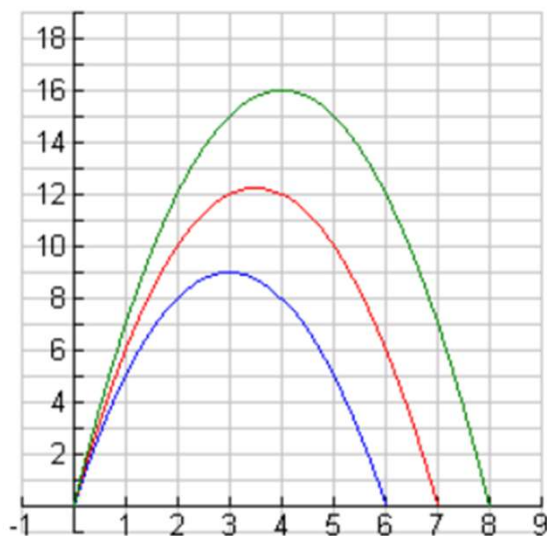
La figura rappresenta le traiettorie di tre getti d'acqua P , Q ed R riferiti ad un piano cartesiano ortogonale. Si indica con x l'ascissa in metri di un punto della traiettoria; l'ordinata è data dalla y della funzione $y=-x^2+ax$. (con a , x , y numeri reali e $x \geq 0$ e $y \geq 0$).

Il punto in cui il getto d'acqua ricade a terra si trova alle seguenti distanze dall'origine degli assi:

- 6 m per il getto P ;
- 7 m per il getto Q ;
- 8 m per il getto R .

Determina i valori di a corrispondenti alle funzioni che descrivono le tre traiettorie. Trova l'altezza massima raggiunta da ciascun getto d'acqua.

Verifica che i tre punti di altezza massima appartengono ad una curva di equazione $y=x^2$.



Il senso del titolo di questa unità:
sollecitare il **confronto** tra parabole, nel significato più immediato, come **traiettorie degli zampilli** di fontane, e la parabola ottenuta come **grafico della variazione delle aree di rettangoli isoperimetrici**

Altri problemi

Altri esempi significativi



17. GITA IN PULLMANN (Cat. 8, 9, 10)

Per una gita in pullman ci sono 50 iscrizioni. La quota è di 60 euro a persona.

All'ultimo momento, alcune persone rinunciano e non vogliono pagare la quota. Gli organizzatori ottengono che chi rinuncia paghi una penale: tanti euro quante sono le persone che hanno rinunciato.

Qual è l'importo minimo che gli organizzatori della gita possono incassare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e mostrate il dettaglio dei vostri calcoli.

Trovare la funzione
che modella il
ricavo

Insegnare per concetti - il concetto di funzione - Rosa
laderosa

DI FIGURA IN FIGURA (Cat. 7, 8, 9, 10)

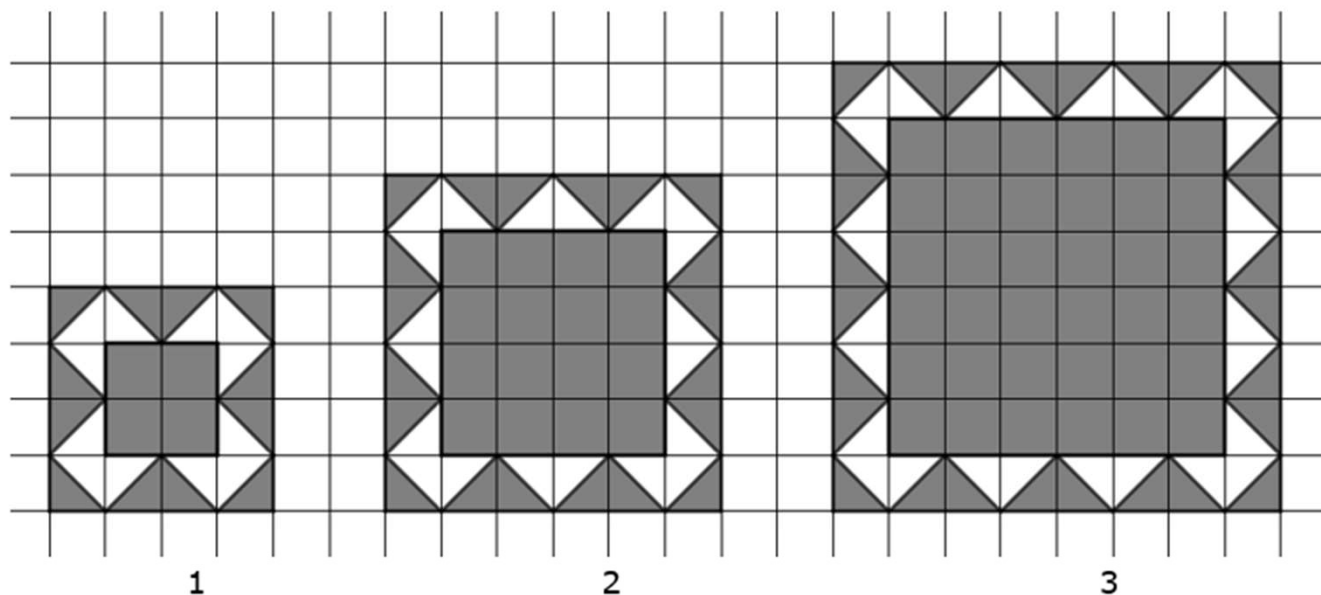
30° RMT

PROVA I

gennaio/febbraio 2023

©ARMT 2023

Le tre figure qui sotto sono i primi tre elementi, di posto 1, 2 e 3, di una lunga successione di figure disegnate su carta quadrettata, che si ingrandiscono con regolarità.



Successioni
da
formalizzare

Ogni figura è costituita da un quadrato grigio centrale, circondato da una cornice bianca e grigia.

Continuando la successione si trova una figura in cui l'area del quadrato grigio centrale è 9 volte l'area del quadrato grigio centrale della figura di posto 7.

Qual è il posto di questa figura?

Spiegate come avete fatto per trovare la vostra risposta.

Insegnare per concetti: il concetto di funzione. Rosa
Iaderosa

CASTELLI DI CARTE

Rally: 13.II.15

Andrea si diverte a costruire castelli con le carte da gioco. Ha costruito questi due castelli: il primo ha due piani ed è fatto con 7 carte; il secondo ha tre piani ed è fatto con 15 carte.

Per costruire un castello di 25 piani, quante carte dovrebbe utilizzare Andrea?

Spiegate il vostro ragionamento.



ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizioni e moltiplicazioni
- Logica: capacità di deduzione e astrazione
- Algebra

Analisi del compito:

- Capire la regola di costruzione dei castelli di carte e come si passa da un castello al successivo avente un piano in più
- Dopo aver disegnato i primi castelli, passare al registro numerico e stabilire una corrispondenza tra il numero dei piani e il numero delle carte, del tipo:

piani	1	2	3	4	5	6	7	8	<u>9</u>	25
carte	2	7	15	26	40	57				

e comprendere che per passare da un castello all'altro si aggiungono successivamente numeri ciascuno dei quali vale sempre 3 di più del precedente:

+5 +8 +11 +14 +17 +20 +23 +26.....

Giungere fino al castello di 25 piani, scrivendo tutti i risultati intermedi (eventualmente con l'aiuto della calcolatrice)

carte 2 7 15 26 40 57 77 100 126... 950

Oppure cercare un legame funzionale tra il numero dei piani e il numero delle carte di un castello. Per esempio:

- Notare che, nel primo castello, il piano 1 (quello più alto) è formato da 3 (=3·1) carte (un triangolo completo) mentre il piano 2, di base, è formato da 4 (= 3·2-2) carte (due triangoli privati dei lati di base); nel secondo castello, il piano 1 è formato da 3 (= 3·1) carte (un triangolo completo), il piano 2 è formato da 6 (= 3·2) carte (due triangoli completi), il piano 3 di base è formato da 6 (= 3·3-3) carte (tre triangoli senza i lati di base). Provare a disegnare castelli più alti e scoprire che la regola che fornisce il numero di carte sul piano n è: $3n$ se n non è il piano di base del castello, $3n-n=2n$ se n è il piano di base del castello. Giungere così a stabilire che per costruire un castello di n piani occorrono $3(1+2+3+.....n-1)+2n$ carte.
- O ancora: osservare che il numero di "triangoli" individuabili in un castello di n piani è n^2 e che quindi il numero dei lati dei triangoli è $3n^2$. Considerare poi che ogni lato, a parte quelli esterni, è contato due volte e che i triangoli sulla base non sono completi e concludere che il doppio del numero di carte necessario per costruire un castello di n piani è dato da $(3n^2 + 2n - n)$ e che quindi $(3n^2 + n)/2$ è il numero di carte di un castello di n piani.

Oppure: osservare che per un castello di n piani occorrono $(1+2+3+...+n)2$ carte "oblique" e $(1+2+3+...+n-1)$ carte

"orizzontali". Quindi, in tutto, $n(n+1)+(n-1)n/2 = (3n^2 + n)/2$

- Concludere che per un castello di 25 piani occorrerebbero 950 carte.

Analisi del problema:
Castelli di carta

Insegnare per concetti - il concetto di funzione - Rosa
laderosa

GARA DI CORSA Rally 17-I Categorie 9-10

Giorgio e Federico fanno una gara di corsa su una distanza di 30 m tra un albero A e un albero B.

Giorgio corre alla velocità di 10,8 km/h, mentre Federico corre alla velocità di 18 km/h.

Federico concede un vantaggio a Giorgio che partirà da un punto C situato tra i due alberi, a 3 metri dall'albero A.

Federico parte dall'albero A esattamente 3 secondi dopo la partenza di Giorgio.

Chi vincerà la corsa? Quanto tempo avrà corso ciascuno?

Spiegate il vostro ragionamento.

19. GARA DI CORSA (Cat 8, 9, 10).

Giorgio e Federico fanno una gara di corsa su una distanza di 30 m tra un albero A e un albero B. Giorgio corre alla velocità di 10,8 km/h, mentre Federico corre alla velocità di 18 km/h.

Federico concede un vantaggio a Giorgio che partirà da un punto C situato tra i due alberi, a 3 metri dall'albero A.

Federico parte dall'albero A esattamente 3 secondi dopo la partenza di Giorgio.

Chi vincerà la corsa? Quanto tempo avrà corso ciascuno?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Ambito concettuale :**

- Aritmetica: rapporti,
- Misura: velocità, distanza, tempo
- Algebra: funzioni

Analisi del compito

- Capire che Federico è più rapido di Giorgio e che, se la distanza tra i due alberi è sufficiente, può raggiungere il suo amico e superarlo.
- Tradurre in m/s le velocità date: Giorgio percorre 3 metri al secondo ($10\,800/3\,600$) e Federico 5 metri al secondo ($18\,000/3\,600$).
- Interpretare numericamente il vantaggio accordato a Giorgio: egli parte dal punto C, situato a 3 metri da A, e percorre 9 metri durante i 3 secondi di attesa di Federico. Giorgio ha dunque 12 metri di vantaggio quando Federico comincia la sua corsa.
- Dedurre che, quando Federico parte per la sua corsa di 30 metri, a Giorgio restano 18 metri da percorrere prima dell'albero B. Poiché Giorgio fa 18 metri in 6 secondi e Federico fa 30 metri in 6 secondi, essi arriveranno insieme all'albero B, e non si avrà così un vincitore. Giorgio avrà corso in 9 secondi e Federico in 6 secondi.

Oppure: scrivere le due funzioni corrispondenti alle corse di Giorgio e Federico, rispettivamente: $CB = V_G \times t_G$ e $AB = V_F \times t_F$, con $CB = 27$ m, $AB = 30$ m, $V_G = 3$ m/s, $V_F = 5$ m/s. Il tempo del percorso di Giorgio è quindi $t_G = 9$ s, quello di Federico è $t_F = 6$ s, ma poiché Giorgio è partito 3 s prima di Federico, essi arriveranno insieme all'albero B.