

La serie dei numeri naturali. Un primo modello?

A che punto eravamo?

A vantaggio della mia comprensione del concetto astratto di numero, ho ripercorso alcune probabili tappe del cammino dell'essere umano verso il numero: dalla istintiva nozione sugli aspetti più elementari della numerazione (uno, nessuno, più d'uno) alle tacche sul bastone per una più accurata contabilità; dalla creazione di nomi specifici per i numeri legati al tipo di oggetti contati, all'ideazione di nomi dedicati esclusivamente ai numeri indipendentemente dalla tipologia di cose contate, fino all'ideazione dei simboli opportuni.

Ho trovato stimolanti le più antiche testimonianze del compimento di questo percorso: la stele di Nefertibet, figlia di Cheope (terzo millennio a. C.) e le raffigurazioni, ancora più antiche, sulla cosiddetta "mazza" di Nerner. Una attività sulle testimonianze rappresentate da queste immagini potrebbe essere di un certo interesse e di qualche utilità anche per giovani allievi.

Cosa sono i numeri naturali

Ripercorso il cammino verso l'astrazione che mi conduce al numero, ho l'impressione che il mio possesso ne sia ora più pieno e stabile. Ho consolidata la mia acquisizione del concetto di numero, comincio a capire cosa sono i numeri naturali e mi pare di essere ora in grado di capire perché i numeri naturali non bastano.

Andiamo per ordine. Ho finalmente capito perché i numeri naturali ($\mathbb{N}$) si chiamano così. Usiamo l'espressione numeri naturali per riferirci alla serie dei numeri interi con cui contare ciò che vediamo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, una successione ordinata che usiamo per indicare la quantità degli oggetti (costituenti un insieme). La chiamiamo naturale perché rivolta innanzitutto agli oggetti che osserviamo in natura (in secondo luogo anche agli enti artificiali e agli enti astratti), e perché corrisponde ad una matematica in qualche modo naturale, e in una certa misura condivisa con altri animali.

Capire cosa sono i numeri naturali significa anche capire perché i numeri naturali non bastano. Alcune operazioni possono essere compiute con i numeri naturali ed altre invece no, e rendono necessario ricorrere ad altre serie. Sto per parlarvi della mia scoperta della legge di composizione interna e della necessità dei numeri relativi e razionali, delle addizioni e moltiplicazioni che generano sempre altri numeri naturali a differenza di quel che accade con sottrazioni e divisioni. Sono questioni elementari, ma confesso che mi pare di averne compreso la portata solo ora, e condivido l'entusiasmo della scoperta chiedendomi se nel mio percorso ci sia qualcosa di spendibile nell'interazione con i giovani allievi.

Nel mio percorso, elemento fondamentale è la domanda sull'origine di ulteriori serie di numeri, sul bisogno a cui rispondono. Mi piace segnalare uno strumento nuovo che ho utilizzato, e che è risultato di grande efficacia: brevi videolezioni di matematica di base trovate su Rete (il canale YouTube di Salvo Romeo); e una concomitante scoperta di grande fascino: l'efficacia del linguaggio simbolico, quando viene usato con intenzione comunicativa.

La composizione interna

Vediamo allora le leggi di composizioni interna. Seguendo Salvo Romeo:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a + b = c \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = d \in \mathbb{N}$$

Per ogni numero a e b appartenenti all'insieme dei numeri naturali, la loro somma e il loro prodotto sono, rispettivamente, uguali ad un numero c e ad un numero d appartenenti anch'essi all'insieme dei numeri naturali. Se, ad esempio,

$$a = 5 \quad b = 3$$

$$5 + 3 = 8 \in \mathbb{N}$$

$$5 \cdot 3 = 15 \in \mathbb{N}$$

(Mi riservo più avanti, con l'aiuto dei matematici del gruppo, di riflettere sul ruolo dello zero "elemento neutro della addizione" e dell'1 "elemento neutro della moltiplicazione", perché immagino la possibilità di sviluppi divertenti).

Addizione e moltiplicazione seguono, dunque una legge di composizione interna dal momento che, componendo tramite una delle due operazioni una coppia di elementi di $\mathbb{N}$, il risultato appartiene ancora (è interno) ad $\mathbb{N}$.

Un primo modello matematico?

Quanto ho appreso su addizione e moltiplicazione mi porta a chiedermi cosa succede con sottrazioni e divisioni. Ma sento il bisogno di fermarsi ancora sul significato didattico del percorso che sto facendo guidato dal problema dell'apprendimento della matematica, dalla curiosità personale per la disciplina e stimolato dalle indicazioni dei colleghi del gruppo di ricerca, senza nessuna pretesa di costruire percorsi didattici, ma evidenziando quei caratteri di ricerca e di scoperta che potrebbero essere utili per attivare in classe una ricerca di gruppo che attivi l'apprendimento.

L'attenzione all'acquisizione del numero e delle sue proprietà, quindi all'utilizzo della simbolizzazione letterale e del calcolo simbolico, sono certamente utili a migliorare l'approccio all'algebra alla didattica (sto utilizzando la prima indicazione di Rosa Iaderosa). So bene, però (cito ancora Rosa) che «la vera frontiera che può motivare e risvegliare l'interesse verso questa disciplina da parte dei giovani è la modellizzazione della realtà». Ho ben presente lo schema di OPPI documenti riprodotto nell'introduzione del nostro spazio di lavoro e fin dall'inizio di questa nostra avventura ho chiesto ai miei colleghi di aiutarmi a capire cos'è il modello matematico, come e quando si comincia ad usarlo consapevolmente e a costruirlo per leggere e interpretare la realtà.

Mi chiedo allora e vi chiedo: la serie dei numeri naturali con le sue leggi non rappresenta già un primo potente modello matematico di rappresentazione e interpretazione della realtà? Non è forse una rappresentazione semplificata, uno schema interpretativo che cerca di ridurre la molteplicità del reale ad alcuni elementi fondamentali (numero e quantità) e che riferito a situazioni reali ci aiuta a comprenderle, prevederle, controllarle? Nel formulare la domanda ho provato ad utilizzare la definizione di modello matematico di cui dispongo (l'espedito fornisce l'apparenza di una domanda retorica, ma resta una domanda vera che attende correzioni, integrazioni, o più radicali smentite).

Nella forma di numeri e sequenze di simboli (che rimandano a concetti, teorie strumenti di calcolo) la serie dei numeri naturali (e l'aritmetica che genera) ci «consente l'individuazione delle relazioni quantitative tra le variabili concorrenti a determinare un fenomeno» (Diz. Treccani), ci aiuta a capire come funziona, a fare previsioni, ad operare forme di controllo. Questo è in breve un modello matematico, «un insieme di enti e relazioni matematiche che consente di descrivere in forma semplificata e controllabile i fenomeni che caratterizzano un sistema in genere complesso»

(Ibidem). Questa mi pare sia la caratteristica della serie dei numeri naturali. Se questo è vero, se siamo di fronte alla costruzione di un primo modello matematico, allora risulterebbe confermata la necessità di dedicare tutto il tempo necessario alla costruzione di questo modello e giustificato il mio entusiasmo nella sua riscoperta.

Le sottrazioni e i numeri interi relativi

Torno ora alle quattro operazioni. È possibile eseguire sottrazioni e divisioni con i numeri naturali? L'esperienza ci dice che la risposta non è affermativa come nel caso di addizione e moltiplicazione. Riprendendo l'esempio di sopra:

$$a = 5 \quad b = 3$$

$$a - b = 5 - 3 = 2 \in \mathbb{N} \quad \text{ma} \quad b - a = 3 - 5 = ? \notin \mathbb{N}$$

Non sempre, dunque, le sottrazioni tra numeri naturali hanno come risultato un altro numero naturale, il risultato non si pone sempre all'interno della serie, la sottrazione insomma non obbedisce ad una legge di composizione interna e ci porta alla introduzione dei numeri interi relativi che costituiscono un'estensione dei numeri naturali, che comprende oltre a questi (che consideriamo ora come interi positivi) anche lo zero e interi negativi.

Funzione fondamentale dei numeri negativi è consentire la sottrazione e quantificare quanto manca per la distribuzione: se ho 20 ragazzi e 18 quaderni, la sottrazione mi dice che mancano 2 quaderni alla distribuzione di un quaderno a ciascuno. (Una digressione terminologica. Mi è stato utile, e non mi pare inutile per i miei studenti del biennio superiore, la considerazione che i termini *sottraendo* e *minuendo* sono forme che derivano da un gerundivo latino e perciò significano rispettivamente 'da sottrarre' e 'da diminuire').

Analoga, anche se in un articolazione più complessa, la funzione dei numeri negativi nella costruzione di un bilancio, che mostri la corrispondenza di entrate e uscite. Funzione di una certa utilità e da far sperimentare agli allievi fin dai banchi di scuola.

Ancora più intrigante l'uso dei numeri relativi per la misurazione del tempo, visto che la nostra storia ci induce a datare eventi precedenti l'anno individuato come principio del calendario in uso (lo chiamiamo anno zero). Dalle nostre parti utilizziamo soprattutto l'espressione "avanti Cristo" (opportunamente abbreviata), ma il modo più semplice, ed ampiamente attestato, è quello di usare numeri preceduti dal segno -.

Ho insomma capito che l'ampliamento degli interi naturali degli interi relativi è sorto nell'esigenza di rendere sempre possibile accanto alla addizione anche l'operazione inversa di sottrazione. Sotto l'aspetto pratico, gli interi relativi si prestano bene al calcolo delle quantità discrete variabili in due sensi opposti (debiti e crediti, succedersi degli anni, prima e dopo l'anno 0).

I numeri interi relativi costituiscono insomma un'estensione dei numeri naturali, che comprende, oltre a questi (considerati ora come interi positivi), anche lo zero e gli interi negativi.

L'idea di infinito

In questa mia riscoperta del numero non mi ero fermato alla considerazione che la serie dei numeri naturali è infinita. Nell'accennare qui alla questione, posso ora dire che la serie degli interi relativi è infinita in due sensi, nella serie dei numeri interi positivi come nella serie dei numeri interi negativi. Si tratta di una prima esperienza dell'idea di infinito in matematica che meriterebbe una sosta, una

capacità di fermarsi a riflettere sul senso di questa scoperta di una grandezza illimitatamente grande, ma che può essere fatta crescere in modo illimitato: per quanto grande sia un numero che pensiamo, possiamo comunque trovarne uno maggiore.

Ci sono tanti modi di indugiare su questa prima intuizione di infinito. Giocando, ad esempio, sulle serie illimitate e i loro sottoinsiemi (come possono essere infinite le serie dei numeri pari e dei numeri dispari?). Ricorrendo magari al celebre “paradosso del Grand Hotel” di David Hilbert. O ricorrendo alle idee di origine aristotelica di *infinito potenziale* e di *infinito in divenire*.