

Perché è così difficile insegnare matematica?

Il rapporto non facile tra la scuola italiana e la Matematica è a tutti noto. I risultati Invalsi di Matematica presentano bassi livelli di competenza in molte scuole secondarie di secondo grado e gli stessi esiti dei percorsi curricolari rivelano risultati di apprendimento inferiori a quelli delle altre discipline. Sono del resto frequenti le testimonianze degli studenti su difficoltà, disinteresse, rifiuto verso una materia considerata astrusa ed ostile, e sono altrettanto frequenti le preoccupazioni degli insegnanti per l'esiguo numero di studenti che ottengono risultati soddisfacenti.

Le riflessioni che seguono nascono da due semplici domande: le “Indicazioni nazionali”¹ e le prove Invalsi ci aiutano a comprendere le ragioni di queste difficoltà nell’insegnamento e nell’apprendimento della Matematica? Che suggerimenti ci danno per migliorarne la didattica?

Credo che per trovare risposte a queste domande occorra affrontare il problema in forma collettiva, con la costituzione di un gruppo di lavoro sulla didattica della Matematica con la partecipazione di insegnanti e di studenti. Può essere però utile, a questo scopo, partire da una ricognizione preliminare delle “Indicazioni nazionali” e del “Quadro di riferimento per le prove Invalsi di Matematica”.

Le analisi e gli schemi che seguono non pretendono perciò di fornire una proposta definitiva, fatta di strumenti di lavoro già pronti, ma intendono offrire alla discussione di docenti e studenti una lettura di quel che i documenti MIUR e INVALSI propongono e delineare, in conclusione, una possibile pista di lavoro.

Comincerò da una lettura delle “Linee Generali e competenze” (paragrafi 2-5) e degli “Obiettivi specifici di apprendimento” nelle “Indicazioni” per trarne elementi utili a delineare la competenza matematica a cui puntiamo nell’insegnamento della materia².

La trasposizione in termini di comportamenti osservabili, necessaria per una progettazione per competenze, offre necessariamente risultati provvisori che richiedono una ulteriore indagine.

Il passo successivo è nella lettura del “Quadro” Invalsi e, segnatamente, dei traguardi di competenza costruiti dal gruppo di lavoro Invalsi sul modello dei traguardi delle Indicazioni del primo ciclo. Lo scopo è di verificare la convergenza del “Quadro” Invalsi con le “Indicazioni nazionali” ed evidenziare aspetti nuovi che consentano di proseguire l’indagine sulla competenza matematica (paragrafi 7-8).

Il risultato provvisorio a cui approdo può essere così anticipato in breve: La competenza matematica che i due documenti delineano è la competenza “Individuare risolvere problemi”, fortemente connessa alle dimensioni del “rappresentare” dati e fenomeni e del “modellizzare” (riconoscere, utilizzare, costruire modelli matematici) e dell’“argomentare”. L’analisi della competenza che offro alla riflessione dei colleghi utilizza i traguardi di competenza del Quadro Invalsi e potrebbe rappresentare un utile punto di partenza per avviare il confronto.

In conclusione offro alla discussione uno strumento di controllo della viabilità dell’analisi della competenza: provo ad utilizzarla per la costruzione di una rubrica di valutazione, secondo una struttura ampiamente sperimentata nelle nostre scuole come strumento di progettazione didattica (paragrafi 9-11)³.

¹ Si tratta del D.I. 7 ottobre 2010 n. 11 - Regolamento recante “Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all’articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89”.

² La difficoltà di questa lettura sta nella formulazione narrativa delle Indicazioni per la scuola secondaria di secondo grado, lontana dalla puntuale formulazione per competenze delle Indicazioni per il primo ciclo.

³ Ringrazio per i preziosi consigli i colleghi di matematica e, in particolare, Rosa Iaderosa, formatrice e ricercatrice OPPI e autrice Invalsi.

Se è ancora vero che «la pratica tradizionale rischia di fare apparire la matematica come la navigazione senza bussola in un oceano di calcoli»⁴, abbiamo bisogno di definire mete e di costruire carte e strumenti per una navigazione più sicura e piena di senso.

1. *Quale Matematica?*

Le raccomandazioni presenti nelle Indicazioni nazionali testimoniano la diffusa consapevolezza delle difficoltà nell'insegnamento-apprendimento della matematica che si sperimenta nelle nostre scuole e sembrano indicare una possibile causa e una via d'uscita. La causa è individuata nell'offerta di una Matematica per la Matematica: le conoscenze matematiche come un insieme di regole da applicare per risolvere problemi standardizzati. La via d'uscita suggerita è nella Matematica per la realtà⁵: un'offerta che, per dare significato agli oggetti matematici, faccia riferimento all'esperienza degli studenti, ma anche agli stessi problemi che nel corso della storia hanno determinato lo sviluppo della disciplina.

Così legge il problema anche il “Quadro di riferimento” Invalsi per la Matematica, che si unisce alle molteplici raccomandazioni di cui abbondano le Indicazioni per tutti gli ordini di scuola, che «invitano chi insegna ad aiutare gli studenti ad acquisire consapevolezza dell'importanza delle relazioni tra Matematica e realtà»⁶. Ne vien fuori «un'immagine della disciplina ben lontana da quella di insieme di tecniche e regole fini a se stesse o utili esclusivamente a successivi sviluppi interni»⁷.

È appena il caso di precisare che le esperienze reali da cui partire sono ovviamente diverse a seconda dell'età degli allievi. Più importante precisare che reale non significa solo riconducibile alla esperienza della vita quotidiana. Reale è ogni problema autenticamente avvertito come tale e capace perciò di coinvolgere il soggetto che apprende.

la Matematica - in queste Indicazioni e quadro sono chiari ed espliciti - coinvolge due aspetti, strettamente collegati tra loro: «uno rivolto alla modellizzazione e alle applicazioni per leggere, interpretare la realtà e risolvere problemi della vita di tutti i giorni; l'altro rivolto allo sviluppo interno, alla riflessione e alle speculazioni sugli stessi prodotti culturali dell'attività matematica»⁸.

Da qui il suggerimento di far riferimento, nei vari gradi scolari, a campi di esperienza degli studenti per dare significato agli oggetti matematici.

Da qui, aggiungo, l'importanza dell'approccio iniziale dell'indagine sugli sviluppi speculativi interni alla disciplina, che deve esser caratterizzato dalla cura a individuare insieme agli studenti e alle studentesse il problema che quegli sviluppi ha originato.

La difficoltà di fondo dell'insegnamento della Matematica - se le osservazioni che precedono hanno fondamento - sembra essere la difficoltà ad abbandonare un approccio centrato sulla disciplina per assumerne uno centrato sull'alunno che apprende mentre attinge alla disciplina per affrontare definite situazioni problematiche, sviluppando a questo modo le proprie competenze.

⁴ *Il sistema scolastico e la matematica: incroci pericolosi*, In “OPPIdocumenti”, 1988 - Anno X, N. 39-40, p. 27, fascicolo su matematica e Informatica a cura del gruppo ATCF / Matematica, coordinato da Nora Nava, al quale partecipavano, tra gli altri, Augusto Tarantini e Alberto Codetta Raiteri.

⁵ Nei *Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado* si legge: «Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà».

⁶ Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica (Documento pubblicato il 30.08.2018), p. 7.

⁷ *Ibidem*.

⁸ Quadro di Riferimento delle prove INVALSI di Matematica (Documento pubblicato il 30.08.2018), p. 6.

Se la sfida è questa, riuscire a passare alla logica della didattica per competenze, è allora importante verificare se Indicazioni nazionali e Quadri Invalsi ci forniscono elementi utilizzabili per una coerente programmazione didattica, in grado di individuare la competenza da perseguire, il modo di valutare il livello raggiunto, le attività con cui esercitarla, i contenuti disciplinari a cui attingere.

Le osservazioni del paragrafo seguente non sono una personale proposta di analisi della competenza matematica ma solo il tentativo di trasformare il testo narrativo delle “Indicazioni” per il secondo ciclo (“Linee generali e competenze”) in un elenco di comportamenti osservabili da offrire alla riflessione dei colleghi, perché valutino in che modo integrarlo, modificarlo, riscriverlo e, dopo essersene riappropriati, come utilizzarlo per la didattica.

In ogni caso, come già osservato a proposito dell’insegnamento dell’Italiano⁹, anche per la Matematica non si pretende in nessuna parte del presente lavoro di dare indicazioni valide per ognuno, ma se mai di mostrare come sia possibile cercare una propria via alla didattica per competenze anche in ambito matematico¹⁰.

L’ipotesi di fondo che guida le considerazioni che seguono è che l’individuazione e l’analisi delle competenze a cui l’insegnamento della Matematica tende sia indispensabile al docente per la sua progettazione didattica e sia uno strumento essenziale per studenti e docenti per avviare e sostenere l’attività di insegnamento-apprendimento.

2. Quali competenze?

L’individuazione delle competenze nelle Indicazioni risulta più semplice per il primo ciclo. Non lo è altrettanto per il secondo.

Le finalità dell’insegnamento-apprendimento della Matematica nelle “Indicazioni” per il primo ciclo sono dichiarate esplicitamente in termini di traguardi per lo sviluppo delle competenze con una dettagliata articolazione di abilità ripartite secondo gli obiettivi specifici di apprendimento disciplinari.

Le finalità dell’insegnamento-apprendimento della Matematica nelle “Indicazioni” per i licei, non hanno la stessa struttura, sono certamente presenti e in modo articolato, ma all’interno di un discorso narrativo che ci obbliga ad una attenta analisi delle competenze e una loro formulazione che faciliti l’avvio della progettazione didattica.

Cominciamo da quanto si dice nella sezione “Linee generali e competenze” per la Matematica.

Al termine del percorso dei licei classico, linguistico, musicale coreutico e della scienze umane lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico¹¹.

Guardando a ciò che ci si aspetta che l’allievo/a sappia fare e può essere osservato (l’unico modo per formulare le competenze in modo significativo) potremmo provare a formulare nel modo seguente i traguardi di competenze a cui si allude nel paragrafo appena riportato. Al termine del percorso liceale lo studente / la studentessa:

⁹ Perché insegniamo Italiano...

¹⁰ «Ciascuno potrà compiere da sé la trasformazione in comportamenti osservabili (meglio se insieme ai propri studenti) di quanto si dice sulle competenze sulle “Indicazioni nazionali”, o su altro testo autorevole sul tema». *Ibidem*.

¹¹ Leggo dall’allegato D del D.I. 7 ottobre 2010 n. 11 - Regolamento recante Indicazioni nazionali... cit, p 269.

- Descrive semplici fenomeni, in particolare del mondo fisico, utilizzando metodi e concetti matematici¹²;
- Riconduce le teorie matematiche che studia al loro contesto storico individuando il problema (filosofico, scientifico, tecnologico) a cui intendevano rispondere.

Si tratta di una interessante introduzione alle competenze matematiche, ma la formulazione è troppo generica per essere utilizzata per la programmazione didattica.

Nel primo traguardo si fa ancora un troppo vago riferimento a “metodi e concetti matematici” da utilizzare, mentre nel secondo non si evidenzia ancora con sufficiente chiarezza quale siano le operazioni richieste e in quale contesto. I due traguardi hanno tuttavia il pregio di individuare le prime operazioni, “descrivere” e “operare previsioni”, e di porre l’accento sui problemi a cui le teorie matematiche hanno inteso rispondere. Quest’ultimo aspetto rende il secondo traguardo, apparentemente più astratto, ricco di suggestioni per una più accurata descrizione delle operazioni richieste.

3. *I tre momenti del pensiero matematico*

Dopo aver accennato alla visione storico-critica dei rapporti tra pensiero matematico e contesto filosofico, scientifico e tecnologico che al termine del percorso lo studente avrà acquisito, così continuano le Indicazioni nazionali:

In particolare avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna

Si tratta di una formulazione che delinea un quadro culturale di grande interesse, ma che ancora non consente di individuare precise competenze. Dalla individuazione dei suddetti tre principali momenti della formazione del pensiero matematico, derivano però otto “gruppi di concetti e metodi” che risultano ricchi di suggestioni per la nostra ricerca delle competenze matematiche, grazie al fatto che ci aiutano a precisare quali problemi in ciascuna di quelle fasi sono stati messi a fuoco e, conseguentemente, quali operazioni sono state messe in campo per affrontarli, ampliando via via le conoscenze e le competenze matematiche.

Non riproduco qui la formulazione degli otto punti (che ciascuno potrà facilmente ritrovare nelle “Indicazioni nazionali”), ma proverò, per approssimazioni successive a estrapolarne suggerimenti per la definizione di competenze.

Innanzitutto (gruppo 1) l’allievo/a è invitato a ricondurre i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (assiomatizzare, generalizzare, dimostrare, definire¹³) alla civiltà greca (il primo momento della formazione del pensiero matematico) in cui prendono forma con gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio.

¹² Anche la descrizione di semplici fenomeni è da considerarsi il punto di arrivo di un percorso a spirale che parte da descrizioni più semplici e ingenui si precisa via via attraverso l’acquisizione di nuovi contenuti disciplinari. Le medesime osservazioni valgono per l’operare previsioni. Tanto per descrivere che per il prevedere, gli allievi e le allieve delle nostre scuole utilizzano modelli matematici dati e non li costruiscono. Occorre interrogarsi - preziosi a riguardo gli studi di Alfio Quarteroni - su quando e come cominciare a costruire modelli matematici (A. Quarteroni, *Modeling Reality with Mathematics*, Springer Nature 2022). Si tratta di una sfida del futuro dell’insegnamento della Matematica di sicuro fascino per studenti e studentesse e punto di svolta della scuola che lavora su competenze.

¹³ Opportuno sottolineare ancora una volta come si tratti di traguardi. Si comincia da semplici giustificazioni razionali per arrivare gradatamente a più articolate dimostrazioni. Fondamentale ricordare che la definizione non è mai un punto di partenza ma un punto di arrivo.

Individuare ciascuna fase del pensiero matematico e riconoscere i procedimenti matematici che ha elaborato è certamente già indizio di una conoscenza profonda, aperta ad una dimensione operativa, ma è nel maneggiare quei procedimenti matematici per affrontare situazioni problematiche che si rivela e si sviluppa la competenza matematica.

Si impone dunque, innanzitutto, la centralità dei “procedimenti caratteristici del pensiero matematico”: assiomatizzare, generalizzare, dimostrare, definire. Si tratta di operazioni caratterizzanti la competenza matematica, ben oltre la geometria euclidea in cui hanno trovato una loro prima compiuta esemplificazione. Ma il passo decisivo da compiere è nel formulare il problema per il quale quei procedimenti sono stati utilizzati e da questo problema individuare la relativa competenza (o aspetto della competenza).

Se il problema di Euclide è nella descrizione e rappresentazione dello spazio, allora il primo traguardo di competenza che si evince dalle Indicazioni potrebbe essere così formulato:

- L'allievo/a utilizza gli elementi della geometria euclidea per descrivere e rappresentare lo spazio¹⁴.

Per riuscirci deve compiere alcune operazioni: definisce gli elementi dell'analisi geometrica; postula assiomi; dimostra proposizioni; generalizza proprietà; calcola e misura¹⁵.

Il secondo momento della formazione del pensiero matematico è individuato con la rivoluzione scientifica del Seicento e con la “matematizzazione del mondo fisico” tramite il calcolo infinitesimale. Qualche precisazione ulteriore la troviamo nei successivi “gruppi di concetti e metodi” obiettivo di studio, in particolare nel Gruppo 2: gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, le funzioni elementari dell'analisi e le prime nozioni del calcolo differenziale e integrale. Sulla base degli elementi fin qui disponibili una secondo traguardo di competenza potrebbe essere così formulato:

- L'allievo/a utilizza elementi della geometria analitica ed elementi del calcolo infinitesimale (differenziale e integrale) per interpretare enti geometrici e relazioni tra enti e grandezze.

Il terzo momento della formazione del pensiero matematico è individuato nel razionalismo illuministico che rappresenta una svolta che conduce alla matematica moderna. Ci si riferisce innanzitutto al calcolo vettoriale, strumento fondamentale per la meccanica, l'elettromagnetismo, la fisica in genere e le tecnologie derivate. Da qui la competenza:

- L'allievo/a utilizza il calcolo vettoriale per l'analisi di fenomeni fisici¹⁶

Fin qui, l'attenzione della sezione “Linee generali e competenze” che stiamo ripercorrendo è prevalentemente rivolta allo studio del mondo fisico. Nei “gruppi di concetti e metodi” successivi, ci si occupa invece del «processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica».

¹⁴ Annoto fin d'ora, a margine di questa formulazione tratta dalle Indicazioni, quanto mi suggeriscono a proposito dello spazio i colleghi di Matematica. Quando ci confronteremo per una rielaborazione di questo aspetto geometrico della competenza matematica, bisognerà considerare con attenzione il passaggio dalla percezione sensoriale dello spazio alla sua concettualizzazione matematica.

¹⁵ Questa preziosa attenzione ai diversi momenti della formazione del pensiero matematico, ricca di suggestione per una Matematica per problemi, non intende essere - né per le Indicazioni né per la lettura che ne diamo - un invito ad assumere sempre un approccio storico allo studio della materia. Si tratterebbe di una indebita generalizzazione che rischia di produrre proposte inadatte al livello di conoscenze e competenze acquisito da allievi e allieve e contrarie alla necessaria gradualità nel percorso formativo.

¹⁶ Cfr. il terzo gruppo di concetti e metodi obiettivo di studio delle Indicazioni nazionali.

4. I modelli matematici, i procedimenti caratteristici, i problemi

Dalla successiva articolazione di “gruppi di concetti e metodi” è possibile trarre elementi per cominciare a descrivere altri aspetti della competenza matematica concernenti la modellizzazione¹⁷ e l'applicazione dei procedimenti matematici in tutte le scienze, l'uso della matematica per analisi statistiche e calcolo delle probabilità:

- Analizza ed utilizza semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo, e rappresenta una stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci¹⁸.
- Utilizza i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (formalizzare, generalizzare, dimostrare, costruire progressivamente definizioni) istituendo collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia¹⁹.
- Realizza analisi statistiche e calcolo delle probabilità per lo studio e la previsione di semplici fenomeni.

L'importanza di queste formulazioni consiste innanzitutto nel fatto che ci consentono di pensare la Matematica in termini di operazioni che si traducono in comportamenti osservabili (analizza, descrive, rappresenta...). La chiarezza sulle operazioni che ci attendiamo dai nostri allievi è essenziale per la progettazione di un percorso di insegnamento-apprendimento orientato alle competenze, le quali richiedono conoscenze, sono sostenute da atteggiamenti della persona, ma sono innanzitutto definite da comportamenti di fronte a situazioni problematiche.

L'altro aspetto rilevante delle formulazioni di queste operazioni è nel suggerimento di ricondurre ciascuna a problemi affrontati nella storia della scienza e, nell'evidenziarne l'origine, nell'invito a tenere anche nella didattica il medesimo atteggiamento problematico. Non si sviluppano competenze se non si affrontano problemi, e si affida lo studio della matematica a concetti e procedure di cui non si chiarisce, ogni volta che sia possibile, l'origine e lo scopo.

Alcune sottolineature per ciascuno degli indirizzi liceali valgono poi ad evidenziare una molteplicità contesti per l'esercizio delle competenze:

- le relazioni tra pensiero matematico e pensiero filosofico;
- l'espressione linguistica nel ragionamento matematico;
- le strutture matematiche nel linguaggio musicale;
- la modellizzazione matematica nell'analisi dei processi sociali.

Si tratta di ambiti di lavoro di grande interesse perché forniscono esempi di esperienze e problemi che, in tutti gli indirizzi, possono suscitare interesse e attivare percorsi di indagine.

Ancora nella sezione “Linee generali e competenze”, troviamo menzione degli strumenti informatici per la rappresentazione e manipolazione degli oggetti matematici, di cui si raccomanda

¹⁷ A proposito del concetto di modello matematico si raccomanda nelle Indicazioni «un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci)».

¹⁸ «Distingue un approccio assiomatico nella sua forma moderna da un approccio assiomatico della geometria euclidea classica».

¹⁹ Annoto che tra i procedimenti si sottolinea nelle Indicazioni l'importanza della induzione della differenza tra induzione in Matematica e in Fisica: «applica il principio di induzione matematica (“invarianza delle leggi del pensiero”) e lo distingue dalla induzione fisica (“invarianza delle leggi dei fenomeni”) e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico».

l'uso «senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale».

Ancora non è possibile dire con chiarezza che cosa sia la competenza matematica, ma, senza pretesa di sistematicità, le Indicazioni ci hanno introdotto in questo mondo, cominciando a delineare aspetti, dimensioni, traguardi.

In conclusione delle “Linee generali e competenze” troviamo una raccomandazione che è utile riportare perché richiama in sintesi un’idea di fondo che attraversa tutte le Indicazioni: centrarsi sui problemi che, soli, possono suscitare interesse e stimolare competenze: «verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi»²⁰.

5. Gli obiettivi specifici di apprendimento

Esiste una buona corrispondenza tra le Indicazioni nazionali per la Matematica e il Quadro di riferimento Invalsi. I due documenti sono concordi in molti punti. Ne segnalo almeno tre:

- nel riferire contenuti e competenze a quattro ambiti: Aritmetica e Algebra, Geometria, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni;
- nel raccomandare la progettazione di percorsi che non perdano mai di vista lo sviluppo di competenze;
- nell’invito a realizzare attività di carattere laboratoriale.

Con queste avvertenze, possiamo esplorare “Gli obiettivi specifici di apprendimento”, alla ricerca di più dettagliate indicazioni per l’individuazione e l’analisi della competenza matematica.

Anche in questo caso, provo a formulare in termini di operazioni osservabili le indicazioni su “contenuti e competenze” offerte nella sezione dedicata agli obiettivi specifici di apprendimento, e proverò a distinguere i concetti, e alcune operazioni più complesse che possiamo considerare aspetti di competenze) da altre operazioni più semplici, che possiamo considerare abilità e che insieme ai concetti e alle disposizioni individuali concorrono alla formazione della competenza matematica.

Le operazioni più complesse, alle quali tutte le altre comportamenti si possono ricondurre mi sembrano 4, una per ciascun ambito:

Aritmetica e Algebra: Utilizza la formalizzazione aritmetica e la simbolizzazione algebrica per rappresentare un fenomeno o risolvere un problema (Tabella 1);

Geometria: Descrive lo spazio e le sue forme attraverso gli elementi della geometria euclidea, e li rappresenta e li confronta con il simbolismo algebrico (Tabella 2);

Relazioni e funzioni: Costruisce rappresentazioni, ottiene informazioni e ricava soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni (Tabella 3);

Dati e previsioni: Rappresenta e analizza in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee, in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti (Tabella 4).

²⁰ «L’approfondimento degli aspetti tecnici, in questi licei, sarà strettamente funzionale alla comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L’indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità»

Aspetto: Utilizza la formalizzazione aritmetica e la simbolizzazione algebrica per rappresentare un fenomeno o risolvere un problema		
	Abilità	Conoscenze
<i>Primo biennio</i>	Compie operazioni di calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale Esegue le operazioni utilizzandone le proprietà. Rappresenta geometricamente i numeri reali su una retta Applica il calcolo algebrico per affrontare il tema dell'approssimazione. Utilizza i metodi di calcolo dei radicali Utilizza la simbolizzazione e il calcolo letterale per analizzare e generalizzare proprietà numeriche e compiere semplici operazioni 	Numeri interi, decimali, razionali, irrazionali, operazioni, algoritmo, MCD, approssimazione, radicali, Monomi, polinomi...
<i>Secondo biennio</i>	Fattorizza semplici polinomi, ed esegue semplici casi di divisione con resto fra due polinomi, evidenziando l'analogia con la divisione fra numeri interi. Analizza contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero Usa strumenti di calcolo per semplici operazioni di calcolo approssimato Interpreta fenomeni fisici ricorrendo all'algebra dei vettori 	Numeri reali, numeri trascendenti, numero π, circonferenza e cerchio, infinito matematico, calcolo approssimato Elementi dell'algebra dei vettori (somma, moltiplicazione per scalare e prodotto scalare)

Tabella 1: Aspetti disciplinari della competenza matematica - Aritmetica e Algebra (dagli Obiettivi specifici di Apprendimento delle Indicazioni nazionali. Cfr. Allegato D, p. 270).

Aspetto: Descrive lo spazio e le sue forma attraverso gli elementi della geometria euclidea, e li rappresenta e li confronta con il simbolismo algebrico		
	Abilità	Conoscenze
<i>Primo biennio</i>	Utilizza il metodo delle coordinate cartesiane per la rappresentazione di punti e rette nel piano e di proprietà come il parallelismo e la perpendicolarità. Realizza costruzioni geometriche elementari sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso) sia mediante programmi informatici di geometria. Dimostra il teorema di Pitagora evidenziando sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali). Riconosce le principali trasformazioni geometriche (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete), ne individua le principali proprietà invarianti, e utilizza procedure per rappresentarle. 	Enti primitivi. parallelismo e la perpendicolarità, Teorema di Pitagora. Teorema di Talete...
<i>Secondo biennio</i>	Rappresenta e descrive l'estensione allo spazio di figure e proprietà della geometria piana, interpretando attraverso l'immaginazione gli aspetti tridimensionali Descrive le sezioni coniche 	Proprietà della circonferenza e del cerchio Proprietà e relazioni elementari delle funzioni circolari Teoremi per la risoluzione dei triangoli Luogo geometrico
<i>Quinto anno</i>	Utilizza procedure per una rappresentazione analitica di rette, piani e sfere 	Primi elementi di geometria analitica dello spazio

Tabella 2: Aspetti disciplinari della competenza matematica - Geometria (dagli Obiettivi specifici di Apprendimento delle Indicazioni nazionali. Cfr. Allegato D, p. 270-1).

Aspetto: Costruisce rappresentazioni, ottiene informazioni e ricava soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni		
<i>Primo biennio</i>	Traduce un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni Costruisce semplici rappresentazioni di fenomeni utilizzando le funzioni matematiche e le loro caratteristiche (dominio, composizione, inversa, ecc.) Descrive e risolve problemi applicativi utilizzando le funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = x$, $f(x) = a/x$, $f(x) = x^2$. Utilizza le tecniche per la risoluzione grafica e algebrica delle equazioni di primo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite Applica gli elementi della teoria della proporzionalità diretta e inversa Passa da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati. 	Funzione, dominio, equazione, disequazione, insiemi, proporzionalità diretta e inversa Modello, rappresentazione numerica, grafica, funzionale
<i>Secondo biennio</i>	Rappresenta e descrive le funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare le funzioni polinomiali, razionali, circolari, esponenziale e logaritmo. Costruisce semplici modelli di crescita o decrescita esponenziale, nonché di andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; sia in un contesto discreto che in uno continuo 	Equazioni e disequazioni di secondo grado Funzioni polinomiali, razionali, circolari, esponenziale e logaritmo Funzioni quadratiche
<i>Quinto anno</i>	Calcola i limiti in casi semplici Affronta problemi relativi a velocità istantanea in meccanica Calcola di aree e volumi utilizzando i principali concetti del calcolo infinitesimale 	Concetto di limite di una successione e di una funzione, calcolo infinitesimale, ottimizzazione, continuità, derivabilità, integrabilità Tangente di una curva

Tabella 3: Aspetti disciplinari della competenza matematica - Relazioni e funzioni (dagli Obiettivi specifici di Apprendimento delle Indicazioni nazionali. Cfr. Allegato D, p. 271).

Aspetto: Rappresenta e analizza in diversi modi (anche utilizzando strumenti informatici) un insieme di dati, scegliendo le rappresentazioni più idonee, in collegamento con le altre discipline anche in ambiti entro cui i dati siano raccolti direttamente dagli studenti		
<i>Primo biennio</i>	Analizza raccolte di dati e serie statistiche uso di strumenti di calcolo (calcolatrice, foglio di calcolo)., considerando le proprietà dei valori medi e le misure di variabilità. Distinguere tra caratteri qualitativi, quantitativi discreti e quantitativi continui dei dati, opera con distribuzioni di frequenze e le rappresenta 	Probabilità, statistica, modello....
<i>Secondo biennio</i>	Usa le distribuzioni doppie condizionate e marginali, dei concetti di deviazione standard, dipendenza, correlazione e regressione, e di campione, in collegamento con le altre discipline e in cui i dati potranno essere raccolti direttamente dagli studenti 	probabilità condizionata e composta, formula di Bayes e le sue applicazioni, elementi di base del calcolo combinatorio.
<i>Quinto anno</i>	costruisce ed analizza esempi di modello matematico 	distribuzioni di probabilità, distribuzione binomiale e distribuzione continua

Tabella 4: Aspetti disciplinari della competenza matematica - Dati e previsioni (dagli Obiettivi specifici di Apprendimento delle Indicazioni nazionali. Cfr. Allegato D, p. 271).

Tutti gli elementi riportati nelle tabelle sono presenti nelle “Indicazioni” tra gli OSA di Matematica, distribuiti per i quattro ambiti disciplinari. Ne abbiamo tuttavia proposto una interpretazione, dal momento che nelle “Indicazioni” non si trova una articolazione in aspetti, abilità, conoscenze.

Si tratta di un rappresentazione di aspetti della competenza matematica che lasciano ancora senza risposta molte domande. I comportamenti ordinati come abilità sono completamente riferibili all’aspetto disciplinare individuato? Questi elenchi di abilità vanno integrati con altri che concorrano alla definizione dell’aspetto considerato? La formulazione di aspetti e abilità va in qualche punto riformulata? Ci sono altri aspetti della competenza matematica riconducibili alle diverse discipline? E, soprattutto, che cosa è la competenza matematica? Siamo infatti arrivati alla conclusione della lettura delle Indicazioni e non ne abbiamo tratto ancora una definizione.

6. Oltre le singole discipline

Concetti e procedure sopra indicati sono considerati dalle Indicazioni contenuti irrinunciabili e concetti fondanti. Ma è ripetuta la necessità di progettare percorsi che «non perdano mai di vista lo sviluppo di competenze il cui raggiungimento è ineludibile per il possesso di quella cultura matematica che aiuti a partecipare in modo informato, consapevole e critico alle scelte sempre più delicate che la vita pubblica impone».

Tutto andrà perciò ricondotto a una o più competenze. Ma quale/ quali? Per cercare nelle pieghe della narrazione delle Indicazioni abbiamo sopra provato a formulare, ove possibile, in termini di operazioni osservabili i contenuti degli obiettivi specifici di apprendimento e a distinguere perciò i concetti dalle operazioni più semplici, che consideriamo abilità, e le abilità da alcune più complesse operazioni che più chiaramente possiamo considerare, se non competenze, aspetti di competenze.

Per la stessa esigenza, il gruppo di lavoro che ha redatto il “Quadro di riferimento per la Matematica” rimedia alla mancanza di traguardi di competenze nelle Indicazioni nazionali per la scuola secondaria e ne propone uno schema (nell’Allegato A), costruito in analogia ai quadri di competenze proposte dalle Indicazioni nazionali per il primo ciclo.

Prima di proporre lo schema con 12 “traguardi di competenza”, il gruppo di lavoro compie un’altra operazione: propone di guardare (finalmente) a tre competenze principali²¹. Ecco: L’allievo/a

- rappresenta oggetti matematici e relazioni fra essi;
- Individua e risolve problemi²² e utilizza e costruisce modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti.
- argomenta utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere;

È possibile osservare una certa corrispondenza con le formulazioni sopra ottenute dall’analisi di contenuti e competenze degli obiettivi specifici di apprendimento. Si osservi la ricorrenza delle stesse operazioni: risolvere problemi, rappresentare e modellizzare, che hanno qui tuttavia un nuovo risalto perché è stato superato il punto di vista delle singole discipline (Algebra, Geometria, Statistica...) che caratterizzava le precedenti formulazioni e vengono presentate come operazioni trasversali.

Evidente l’interconnessione tra le tre dimensioni. Non è possibile individuare e risolvere problemi senza rappresentare oggetti matematici e relazioni e infatti più avanti, nel delineare i traguardi di competenza si riconduce il rappresentare e il modellizzare nell’ambito del risolvere problemi (vedi tabella 5).

Altrettanto evidente la connessione tra Argomentare e Risolvere problemi se si pensa che l’argomentare accompagna il procedimento di risoluzione, lo spiega, lo ripercorre. Argomentare significa infatti, tra l’altro, accertare la ragionevolezza di un’affermazione, validarla con riferimento a una teoria; controllare la correttezza di un risultato, giustificare la sua adeguatezza in relazione al problema affrontato. Sono articolazioni e specificazioni dell’argomentare che rendono chiaro che «la costruzione di un’argomentazione è in molti casi una attività di autentico problem

²¹ Ne viene indicata una quarta («sviluppa un atteggiamento positivo verso la Matematica, imparando a vederla come prodotto culturale fortemente unitario e operativo») che, per il momento, preferisco omettere, ma che recupereremo tra gli atteggiamenti individuali che concorrono alle competenze matematiche.

²² Per quanto ovvio, annoto comunque che qui si parla di problemi intesi innanzitutto come situazioni problematiche della vita reale. Ripetuti sono nelle “Indicazioni” i riferimenti alla Matematica come strumento per operare nella realtà e gli inviti ad evitare di ridurre le conoscenze matematiche a un insieme di regole da applicare per risolvere problemi standardizzati.

solving e, d'altra parte, il problem solving richiede in genere attività di validazione intermedie e finali di tipo argomentativo»²³.

L'individuazione di queste operazioni fondamentali, Rappresentare, Argomentare, Risolvere problemi rappresenta un punto di svolta della nostra ricostruzione. Disponiamo finalmente di formulazioni che possono rappresentare le competenze matematiche che andiamo ricercando.

È appena il caso di sottolineare che il nostro costante punto di riferimento deve rimanere l'osservazione degli allievi e dell'interazione educativa e non la semplice coerenza dell'analisi dei documenti ministeriali e del loro esame. Centrale rimane l'esperienza didattica che sancisce il fallimento di un approccio centrato sulle discipline e incoraggia invece un approccio metodologico centrato sugli alunni, e sul loro bisogno di avere strumenti per affrontare situazioni problematiche. In questo sta la vitalità delle discipline e l'efficacia dell'insegnamento-apprendimento.

7. I traguardi di competenza

Il “Quadro di riferimento” delle prove di Invalsi Matematica evidenzia lo stretto rapporto esistente tra Risolvere problemi e Argomentare, e suggerisce pertanto che le diverse attività matematiche si possono aggregare attorno a questi due aspetti.

Ecco allora come si possono rappresentare le due dimensioni della competenza matematica descritte attraverso i traguardi di competenza del gruppo Invalsi, esplicitamente ricondotti alle due dimensioni, ed affiancate dalle operazioni, comuni alle due dimensioni precedenti, ricondotte dal gruppo Invalsi alla dimensione del Conoscere (Tabella 5).

Mentre si riconduce il “Rappresentare” al “Risolvere problemi” si introduce come terza dimensione il “Conoscere” disciplinare come sapere in azione, conoscenza profonda che, nella situazione problematica, si rivela capacità di utilizzarla nei procedimenti risolutivi.

Alla dimensione del conoscere sono ricondotti comportamenti che possiamo chiamare “abilità” o conoscenze procedurali (nel Quadro di riferimento delle prove di Invalsi di Matematica si preferisce chiamarle “competenze strumentali al problem solving”). «Le due attività matematiche Risolvere problemi e Argomentare - si legge a p. 18 - richiedono conoscenze su oggetti matematici tradizionalmente definiti come “concetti”, segni e sistemi di segni, algoritmi e tecniche di trattamento, oltre alla capacità di farne uso stabilendo connessioni fra essi. In questo senso possiamo parlare di competenze strumentali al problem solving e all'argomentazione che devono essere accertate proprio per questo carattere di strumentalità necessaria allo svolgimento di compiti più complessi». Le competenze matematiche sono individuate da operazioni complesse che vanno viste nella loro relazione con la conoscenza degli oggetti matematici e con l'abilità di rappresentarli e metterli in relazione, sono «“unità” di conoscenze e capacità e intenzione di farne uso per affrontare compiti». Chiarita questa unità, resta legittimo poter distinguere il conoscere dal fare consapevole ed esperto, anche se risulta suggestiva la proposta di usare il verbo “conoscere” al posto del sostantivo “conoscenza”: un modo per sottolineare la concretezza dell'attività al posto dell'astrazione di un contenuto che stia per sé, e l'idea connessa che non si dà conoscenza vera che non si traduce in operazioni²⁴.

²³ Quadro di riferimento delle prove di Invalsi Matematica, p. 18. Nelle Indicazioni nazionali e nuovi scenari del 2017 si fa riferimento alla matematica come disciplina che permette di sviluppare competenze trasversali, in particolare quelle argomentative «Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti. In particolare l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare d'informazioni false o incontrollate».

²⁴ Credo che nell'analisi di una competenza, centrata sulla struttura delle discipline sia opportuno continuare a individuare abilità e conoscenze e indicare tra queste ultime concetti, procedure, teorie. Nel passaggio alla Rubrica di competenza, centrata sui comportamenti dell'allievo/a converrà invece parlare di “Padronanza delle risorse cognitive”.

Risolvere problemi <i>Individua e risolve problemi, utilizzando e costruendo modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti.</i>	Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni. Utilizza modelli matematici dati o costruiti in modo adeguato alla situazione.	Conoscere Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni.
	Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.	Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi.
	Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
	Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza.	
Argomentare <i>Argomenta utilizzando le conoscenze possedute in modo pertinente e coerente con la tesi da sostenere</i>	Produce argomentazioni adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.	
	Accerta la ragionevolezza di un'affermazione, la valida con riferimento a una teoria; controlla la correttezza di un risultato, giustifica la sua adeguatezza in relazione al problema affrontato.	

Tabella 5: L'analisi delle competenze matematiche attraverso i traguardi di competenza del "Quadro di riferimento per la Matematica".

8. Gli aspetti e i processi

Disponiamo così finalmente di una analisi dei diversi aspetti della competenza matematica. Che uso farne per la progettazione didattica? Come già per le competenze in Italiano, per trasformare questa analisi in una rubrica di valutazione occorre procedere ad una riorganizzazione delle voci guardando alle concrete caratteristiche del percorso didattico, con la sua precisa impronta metodologica. Occorre guardare cioè ai processi effettivamente messi in atto dagli studenti nel "Risolvere problemi", oltre che l'analisi della competenza. Ciascun docente la costruirà in modo che gli aspetti selezionati e ordinati corrispondano ai processi effettivamente attivati nel corso dell'attività didattica. Grande vantaggio potrà venire dal confronto in un gruppo di lavoro per la didattica della Matematica.

Nell'esempio che segue faccio riferimento all'analisi della competenza di cittadinanza "Risolvere problemi" messa punto con gli studenti nel corso di una attività a classi aperte e validata successivamente in una attività PON specificamente dedicata alla Matematica²⁵. Questa l'analisi della competenza:

²⁵ Si tratta di una delle schede del "Gruppo autovalutazione" della "Settimana della creatività e della responsabilità 2015" al Liceo Cassarà, successivamente utilizzata nel modulo PON "Diamo i numeri".

Risolvere problemi: affrontare situazioni problematiche costruendo e verificando ipotesi, individuando le fonti e le risorse adeguate, raccogliendo e valutando i dati, proponendo soluzioni utilizzando, secondo il tipo di problema, contenuti e metodi delle diverse discipline.	Individuare il problema Definire e delineare le caratteristiche del problema, analizzandone la natura e le difficoltà
	Raccogliere e valutare dati Raccogliere dati pertinenti e valutarne l'attendibilità, individuando fonti adeguate alla natura del problema
	Fare ipotesi per una possibile soluzione Formulare ipotesi di soluzione basandosi sulla creatività elaborando strategie che portino a scartare le alternative non valide e alla soluzione del problema
	Trovare soluzioni Concepire attività realistiche e metterle in pratica per procedere alla soluzione del problema
	Rivedere il proprio lavoro Verificare che i risultati siano adeguati alle caratteristiche del problema e diano una risposta alle difficoltà di partenza

Tabella 6: analisi della competenza di cittadinanza “Risolvere problemi” del modulo PON 2018 “Diamo i Numeri” al Liceo Cassarà di Palermo.

Risultano evidenti alcuni punti di contatto tra questa formulazione di Tabella 6 e l'analisi della competenza matematica a cui sopra siamo approdati con la Tabella 5, in cui troviamo, declinate con lo specifico linguaggio della matematica e diversamente aggregate, operazioni analoghe a quelle individuate nel descrivere la competenza di cittadinanza.

Evidente la complessità e la specificità matematica, che, prima ancora che nella declinazione delle operazioni disciplinari del “Conoscere” è nel ricorso al concetto di modello matematico e nel rilievo della spiegazione del procedimento seguito nella risoluzione del problema, rilievo che trova ulteriore espansione nella dimensione dell’“Argomentare”.

Il valore della tabella 6 consiste nel fatto che l'analisi, condotta da docenti di diverse materie e condivisa con gli studenti, ha permesso di ragionare sui processi da mettere in campo e di metterli in fila secondo una sequenza operativa che guarda più al lavoro da compiere con gli studenti che alla descrizione della struttura della disciplina²⁶. Ne consegue una immediata evidenza delle operazioni che ci aspettiamo dallo studente e dalla studentessa competente, e la possibilità di ordinarle con facilità secondo le tre strategie d'azione di ogni competenza: mesa a fuoco, strategia risolutiva, regolazione e controllo²⁷.

Anche per la nostra competenza matematica, presentata attraverso l'analisi del “Quadro” Invalsi in tabella 5, è possibile aggregare le diverse operazioni in macro-processi (li chiameremo “aspetti”)

²⁶ Il successivo vantaggio di una scheda simile è nella guida per progettare attività didattiche conseguenti. Riporto uno stralcio della descrizione delle attività del modulo “Diamo i numeri” «Per ogni incontro si prevedono due fasi. Nella prima gli studenti vengono posti di fronte a problemi ben definiti da risolvere utilizzando regole date; i problemi non sono necessariamente di natura strettamente matematica, ma possono essere anche giochi, quesiti logici. L'enfasi si pone sulla risolubilità del problema all'interno delle regole date e della necessità di sviluppare delle strategie volte a rintracciare la soluzione e, soprattutto, di insistere fino a trovare la soluzione senza farsi scoraggiare dalle difficoltà iniziali. Lo scopo è quello di far provare agli studenti che l'individuazione, inizialmente magari per tentativi e poi in modo sempre più consapevole, di una corretta strategia nell'affrontare un problema porta più facilmente alla soluzione. Nella seconda fase si affrontano gli argomenti più strettamente curriculari cercando da un lato di mettere in pratica quanto visto, ‘giocando’, nella prima fase migliorando il proprio approccio e il proprio metodo di lavoro, e dall'altro di potenziare effettivamente le competenze algebriche e geometriche necessarie a migliorare il proprio rendimento nella disciplina».

²⁷ M. Castoldi, *Valutare e certificare le competenze*, Carocci, Roma 2016. Id., *Progettare per competenze*, Carocci, Roma 2011.

facendo riferimento alla struttura profonda di ogni competenza, costituita dalle tre strategie d'azione messe in campo per affrontare qualsiasi problema, sopra ricordate. Vediamole più da vicino:

- **Messa a fuoco del problema:** i processi di interpretazione del compito da affrontare, per mettere a fuoco la situazione problematica su cui attivarsi. Nel caso delle competenze matematiche, l'analisi dei dati per descrivere la situazione problematica e produrre ipotesi di soluzione.
- **Strategia risolutiva:** i processi di azione, le strategie operative che il soggetto deve attivare per rispondere al compito richiesto. Nel caso delle competenze matematiche, la decisione presa, il modello matematico adottato o costruito e il procedimento che porta alla soluzione.
- **Regolazione e controllo:** i processi di autoregolazione attivati. Nel caso delle competenze matematiche, la spiegazione del procedimento seguito, in parte inseparabile dallo svolgimento del procedimento, ma utilizzabile in fase di controllo e revisione, specie nel confronto di procedimenti diversi.

Proverò ad utilizzare queste macro-voci per articolare le operazioni indicate dai traguardi di apprendimento per la dimensione "Risolvere problemi" in una rubrica di valutazione da offrire al confronto dei colleghi, per verificarne la coerenza interna e, soprattutto, la sua spendibilità nella progettazione didattica.

9. Dall'analisi della competenza alla rubrica

Vediamo allora come sia possibile articolare una analisi della competenza *Individua e risolve problemi*, ordinando le diverse operazioni individuate secondo i tre aspetti fondamentali di ogni competenza (Tabella 7).

Aspetti	Fasi del processo	Abilità
<i>Messa a fuoco</i>	Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati per descrivere situazioni e individuare caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	Si muove con sicurezza nel calcolo numerico e simbolico; applica correttamente le proprietà delle operazioni con i numeri reali; realizza ordinamenti, calcola ordini di grandezza ed effettua stime numeriche e approssimazioni. Risolve equazioni e disequazioni. Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e coglie le relazioni tra gli elementi. Utilizza proprietà delle figure geometriche e teoremi per il calcolo di lunghezze, aree e volumi. Comprende e utilizza diverse forme di rappresentazione, passando dall'una all'altra a seconda delle esigenze (grafica, numerica, simbolica, nella lingua naturale).
<i>Strategia di soluzione</i>	Utilizza modelli matematici dati o costruiti in modo adeguato alla situazione. Adotta procedimenti di soluzione valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati. Esprime valutazioni e stime di probabilità in situazioni caratterizzate da incertezza.	
<i>Controllo</i>	Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	

Tabella 7. Analisi della competenza *Individua e risolve problemi*, utilizzando e costruendo modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti.

Siamo così pronti alla costruzione della nostra rubrica della competenza *Pone e risolve problemi*, di cui proponiamo una bozza.

Aspetti	Livello iniziale	base	intermedio	avanzato
<i>Messa a fuoco</i>	Rappresenta dati, se guidato, per descrivere situazioni e individua alcune caratteristiche di un fenomeno o di una situazione	Rappresenta, elabora, analizza e interpreta dati per descrivere situazioni e individua caratteristiche di un fenomeno o di una situazione	Rappresenta, elabora, analizza e interpreta con sicurezza dati per descrivere situazioni e individua caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.	Rappresenta, elabora, analizza e interpreta in piena autonomia dati per descrivere situazioni e individua caratteristiche di un fenomeno o di una situazione, allo scopo di produrre ipotesi e prendere decisioni.
<i>Strategia di soluzione</i>	Utilizza, se guidato, semplici modelli matematici Adotta procedimenti di soluzione seguendo le istruzioni ricevute	Utilizza modelli matematici dati Adotta procedimenti di soluzione valutando le informazioni possedute	Individua ed utilizza, tra diversi modelli matematici proposti, quelli più adeguati a descrivere determinate situazioni oggetto di interesse. Adotta procedimenti di soluzione valutando le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare	Dati una situazione o un fenomeno reali individua le variabili significative e costruisce un modello matematico adeguato a rappresentarli. Adotta procedimenti di soluzione valutando in piena autonomia le informazioni possedute, le loro relazioni con ciò che si vuole determinare e la coerenza e plausibilità del procedimento risolutivo e dei risultati trovati.
<i>Controllo</i>	Riepiloga i passaggi del procedimento seguito	Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi.	Riconosce, fra diverse argomentazioni, quelle che sono adeguate a sostenere una determinata tesi; produce esempi e controesempi utili a confermare o a confutare una determinata affermazione.	Produce argomentazioni esplicitando la tesi, utilizzando conoscenze e forme argomentative pertinenti alla tesi oggetto di argomentazione.

Tabella 8a: Rubrica di competenza *Individua e risolve problemi, utilizzando e costruendo modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti*.

Aspetti	Livello iniziale	base	intermedio	avanzato
<i>Padronanza delle risorse cognitive</i>	<i>Utilizza solo alcune delle informazioni e procedure proposte</i>	<i>Utilizza le conoscenze e le abilità di base proposte</i>	<i>Utilizza in modo appropriato buona parte delle risorse cognitive proposte</i>	<i>Utilizza con sicurezza e proprietà le risorse cognitive acquisite nello scambio e con la propria indagine</i>
<i>Atteggiamento verso il lavoro</i>	<i>Lavora se stimolato</i>	<i>Si applica con attenzione al lavoro</i>	<i>Lavora in modo autonomo mostrando interesse al risultato</i>	<i>Lavora in modo autonomo coinvolgendo gli altri alla partecipazione</i>

Tabella 8b: Rubrica di competenza *Pone e risolve problemi, utilizzando e costruendo modelli descrittivi e predittivi in diversi contesti*: Risorse cognitive e atteggiamenti. Le conoscenze e gli atteggiamenti individuali completano l'analisi della competenza e integrano la rubrica di valutazione.

Completano la rubrica le risorse cognitive e le disposizioni ad agire. Per il dettaglio delle conoscenze (eventualmente declinabili in modo articolato in rubriche di prestazione per singole attività) abbiamo detto nelle analisi delle competenze e nelle tabelle sugli obiettivi specifici di apprendimento delle discipline. Quanto agli atteggiamenti, il Gruppo di lavoro Invalsi segnala la necessità di «sviluppare un atteggiamento positivo verso la Matematica, imparando a vederla come prodotto culturale fortemente unitario e operativo». Propongo la dimensione “atteggiamento verso il lavoro” per far sinteticamente riferimento agli atteggiamenti individuali con uno sguardo al comportamento degli allievi nel corso delle attività.

Siamo così pronti a cominciare un viaggio di esplorazione del mondo attraverso la Matematica e il suo dialogo con una molteplicità di altre scienze.

Precisato l'obiettivo e il criterio di valutazione, potremo infatti chiarire il compito (quale prodotto, quale performance?), l'approccio metodologico (in che modo attivare e condurre la ricerca?), i contenuti disciplinari (quali informazioni, concetti, teorie, procedure mettere in campo?)²⁸.

Prima di concludere con una ulteriore riflessione sull'utilità di una simile rubrica per avviare la progettazione didattica e guidare il processo di insegnamento apprendimento, converrà indugiare su un ultimo suggerimento che proviene dalle prove Invalsi e, in particolare, dai limiti di queste prove.

10. *Quel che Invalsi non può fare*

Il gruppo di lavoro che ha redatto il Quadro di riferimento per la Matematica ha piena consapevolezza dei limiti delle prove Invalsi per l'accertamento delle competenze matematiche. Anche questa consapevolezza dei limiti delle prove è ricca di suggerimenti per la progettazione didattica, almeno quanto gli aspetti della competenza riconoscibili attraverso le prove.

Le prove standardizzate risultano utili a dare informazioni su alcune criticità del sistema nel suo complesso, ma sono poco adatte a misurare il conseguimento di alcuni dei traguardi elencati nelle Indicazioni. Sono uno strumento utile per valutare, ad esempio, i traguardi “Descrive, denomina e

²⁸ Si tratta dei quattro elementi della progettazione per competenze per i quali rimando al mio *I modelli di progettazione e la mappa di Kerr*, in “Teorie pedagogiche e pratiche educative”, Bollettino della Fondazione “Vito Fazio-Allmayer”, Anno XLVIII, n. 2, luglio-dicembre 2019, ora in *Il docente in aula virtuale* cit. pp. 119-128.

classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure” o “Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza”, ma, si legge nel Quadro di riferimento, «sono meno adeguate a valutare pienamente un traguardo come “Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri”», o per «orientarsi in una situazione problematica fino a individuare il problema da affrontare (*problem posing*)».

È questo un prezioso suggerimento da tenere ben saldo: la nostra pratica didattica va ben oltre Invalsi perché centrata sulla competenza ad individuare e problemi e a risolverli formulando ipotesi, ragionando, confrontandosi, argomentando.

Per quanto riguarda la dimensione “Argomentare”, con le prove Invalsi è possibile scegliere l’affermazione corretta e individuare la sua giustificazione tra quelle proposte. «Più arduo appare proporre quesiti che richiedono di scegliere l’affermazione corretta e di produrre una giustificazione per essa». Impossibile accertare la capacità di produrre e poi giustificare un’affermazione a partire da un quesito aperto del tipo “ipotizzare e verificare” o “congetturare e dimostrare”.

La nostra progettazione didattica, che va oltre Invalsi, dovrà perciò valorizzare queste operazioni e costruire situazioni di apprendimento e coerenti strumenti di valutazione con cui gli allievi siano chiamati a “ipotizzare e verificare”, a “congetturare e dimostrare”. Per questo le prove «non devono né possono sostituirsi all’azione dell’insegnante per la valutazione degli studenti della propria classe».

I risultati delle prove «possono essere utilizzati come una fra le molte informazioni di cui l’insegnante deve entrare in possesso per valutare», per almeno due motivi.

Il primo riguarda la struttura delle prove, che, come abbiamo visto, sono poco adatte a valutare pienamente il conseguimento di aspetti rilevanti della competenza.

Il secondo motivo riguarda il significato stesso della valutazione che nella sua natura è un processo profondamente legato alla soggettività dello studente e della studentessa, agli atteggiamenti e disposizioni individuali e al vario modo con cui si intrecciano con la soggettività dell’insegnante nella relazione educativa²⁹. «La valutazione che l’insegnante fa delle competenze conseguite da uno studente non può non essere soggettiva, dipendente anche da fattori sociali e affettivi, e tesa anche a promuovere l’acquisizione stessa delle competenze: tanto più è soggettiva, tanto più diventa adatta allo studente che viene valutato e quindi ricca e significativa per quello studente».

Le prove standardizzate, insomma importanti informazioni di sistema con cui l’insegnante si può confrontare e di cui si può avvalere per la valutazione individuale. Ma il contributo più importante è nell’invito ad una analisi della competenza con cui avviare una progettazione didattica professionale.

10. A cosa potrà servire la rubrica?

Chiarito che il principale contributo di Invalsi è nell’invito esplicito ad andare oltre Invalsi nella logica di una progettazione per competenze, torniamo alla rubrica di valutazione (Tabelle 8a e 8b) costruita proprio in dialogo con Indicazioni e Quadro di riferimento Invalsi, e chiediamoci: a cosa serve una rubrica come questa? Ecco alcune risposte possibili.

Mettere a punto questa rubrica e usarla con i propri studenti serve innanzitutto a indicare che l’obiettivo dell’insegnamento della Matematica è una competenza fondamentale: “l’allievo/a individua e risolve problemi”. Serve quindi a chiarire che questa competenza è caratterizzata da precise dimensioni operative, richiede un certo numero di conoscenze ed è sostenuta da un atteggiamento positivo verso la materia e le discipline che la compongono.

²⁹ Sulla soggettività della valutazione rimando almeno a Mario Castoldi, *Valutare e certificare le competenze*, cit.

La rubrica, con l'analisi della competenza che la precede, vale a chiarire che l'approccio matematico alla risoluzione dei problemi comporta la costruzione di un modello, la raccolta, elaborazione, rappresentazione di dati pertinenti, l'esercizio della previsione e del calcolo.

Tutto ciò fornisce al docente uno schema per progettare le attività didattiche, allo studente per orientare lo studio, ad entrambi per guidare la valutazione e l'autovalutazione.

La rubrica fornisce innanzitutto uno strumento di valutazione del raggiungimento dell'obiettivo e del livello di competenza conseguito. Rappresenta nello stesso tempo una pista per le attività da programmare. Orienta infine nel percorso di studio, dichiarando che cosa ci si aspetta che l'allievo/a faccia e il percorso per progredire.

Momento decisivo sarà la scelta delle attività, che, in coerenza con l'individuazione e l'analisi della competenza, dovranno centrarsi su problemi: problemi dalla vita quotidiana, problemi della storia delle scienze, problemi specifici delle discipline matematiche.

L'approccio metodologico non potrà quindi essere che laboratoriale. Le "Indicazioni nazionali" e il "Quadro di riferimento" Invalsi richiamano con chiarezza l'importanza del Laboratorio di Matematica: «In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio [...] come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, [...] costruisce significati».

Forte, convergente e ripetuto è l'invito a considerare la matematica «sia come strumento utile nella vita concreta sia come un prodotto culturale che riguarda le speculazioni più libere dello spirito umano». Ne emerge un'immagine della disciplina come strumento di lettura del mondo, «ben lontana da quella di insieme di tecniche e regole fini a se stesse o utili esclusivamente a successivi sviluppi interni».

Rimangono poi i vantaggi di dalla costruzione di una rubrica di valutazione per ogni materia, che converrà ripetere: accogliere l'allievo/a, attivare una ricerca di gruppo, innestare in questa ricerca comune la ricerca di senso di ciascuno.

La rubrica di valutazione fornisce strumenti per accogliere l'allievo, evidenziando nel livello iniziale, quel che sa fare, e chiarendo che cosa ci si aspetta di imparare insieme per progredire gradualmente verso livelli superiori di competenza. Una gradualità che si realizza attraverso traguardi successivi di un percorso che l'allievo riconosce e decide di intraprendere per almeno tre motivazioni: ne comprende l'utilità, si sente riconosciuto nel suo bisogno di apprendere, si percepisce in grado di farcela con il sostegno dell'insegnante e dei compagni.

In matematica come in Italiano, l'analisi della competenza e la costruzione della rubrica di valutazione facilita gli insegnanti che si disperano per le "carenze di base" dei loro allievi. Risulta infatti più facile mettere a fuoco che cosa gli allievi non sono ancora in grado di fare e recuperare abilità e contenuti.

Attivata una ricerca comune su problemi, modelli e linguaggi della interpretazione matematica del mondo, il compito del docente di Matematica - esperto disciplinare e professionista dell'educazione al pari del docente di Italiano e di ogni altra disciplina - è di creare condizioni favorevoli perché ciascuno si inserisca con la sua personale ricerca di senso.

È questo - non è inutile ripeterlo - il compito di ogni educatore: riconoscere ed accogliere la persona che si ha di fronte, con le sue domande sul mondo e su se stesso, ed offrire situazioni per apprendere in cui il percorso attivato da quelle domande trovi alimento e sostegno.

Un impegno collettivo per una progettazione professionale potrà dare alle analisi e agli strumenti di cui abbiamo fatto qui cenno la forza necessaria per rendere meno difficile insegnare Matematica, più facile impararla.