

PROBLEMI E MODELLI

ROSA IADEROSA

14/06/24



CHE COS'E' UN MODELLO

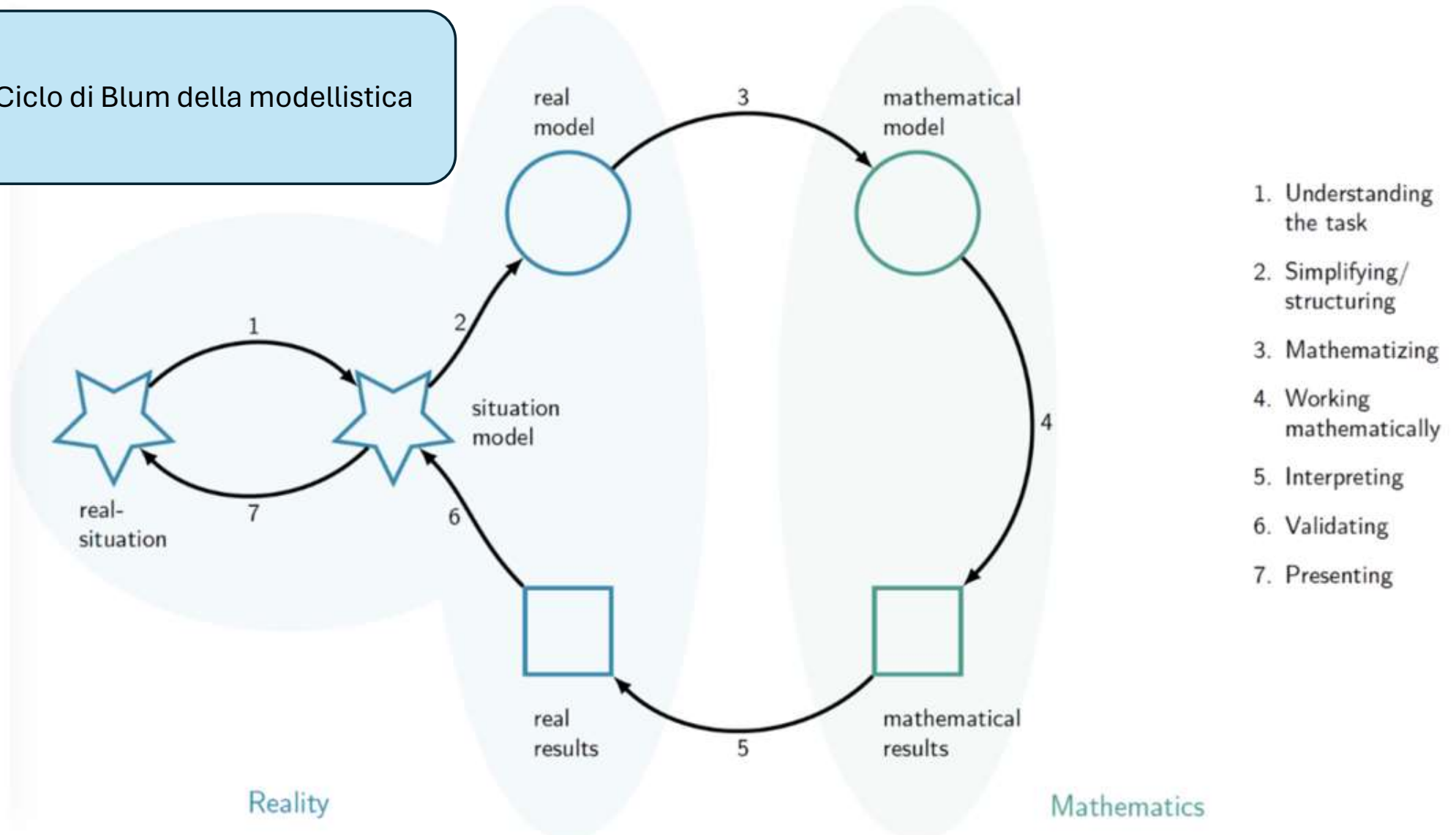
- La realtà è estremamente complessa.
- Per studiare un fenomeno abbiamo bisogno di **selezionare** variabili
- Trasformeremo allora la situazione o il fenomeno reale in una rappresentazione semplificata, che chiameremo **modello**
- un modello ci consente di analizzare il fenomeno e prevedere dei risultati attraverso la formalizzazione matematica
- è necessario tuttavia ricordarsi che è stata fatta una selezione, rispetto alla complessità
- Che la scelta delle variabili selezionate non è univoca

La modellizzazione

un'attività che sintetizza la capacità di:

- **formalizzare** attraverso un modello matematico una situazione problematica
- **analizzare** aspetti del modello in relazione alla situazione di partenza e reinterpretarli.

Ciclo di Blum della modellistica



Problemi di modellizzazione lineare

un contesto ricco
per sviluppare / valutare
conoscenze e competenze sulle funzioni

Conoscenze - competenze

La competenza scolastica dovrebbe sintetizzare un apprendimento significativo della disciplina, in cui trovano equilibrio la dimensione conoscitiva e quella operativa

La competenza in Matematica, come in qualsiasi altra disciplina, non può essere accertata e valutata in maniera decontestualizzata, ma è indispensabile ancorare la competenza culturale ad un contesto (Ambel, 2002).

- E' importante quindi che l'insegnante identifichi dei contesti disciplinari che sono particolarmente ricchi di aspetti e situazioni interpretative legati alle competenze più che alle pure conoscenze.
- il contesto dei problemi di modellizzazione lineare si può rivelare un ambito particolarmente ricco per promuovere e accertare competenze

Il “problema – tipo”

(Gallo et alii, Numeri, Variabili, Figure, Vol.II , SEI Torino, 1996)



Un corriere deve consegnare ad una ditta una partita di scatoloni, consegnando non meno di 60 scatoloni in un giorno. Il corriere possiede due furgoni, A e B, che possono viaggiare contemporaneamente. Il furgone A contiene al massimo 10 scatoloni, mentre il furgone B ne contiene al massimo 5. Il furgone A non può compiere più di 5 viaggi al giorno (andata e ritorno), mentre il furgone B non può fare più di 8.

Sapendo che ogni viaggio del furgone A costa al corriere 80 euro e che ogni viaggio del furgone B costa 100 euro, quanti viaggi giornalieri il corriere deve far compiere ai due furgoni a pieno carico in modo che il costo sia minimo?



PER FORMALIZZARE:

Un primo passo importante è dare un nome ai dati ed esplicitare i dati impliciti.

Indichiamo con :

x il numero di viaggi giornalieri del furgone A ;

y il numero di viaggi giornalieri del furgone B.

Le condizioni sono le seguenti:

- in un giorno devono essere consegnati ***non meno*** di 60 scatoloni
- il furgone A contiene ***al massimo*** 10 scatoloni
- il furgone B contiene ***al massimo*** 5 scatoloni
- il numero di viaggi giornalieri di ciascun furgone non può essere negativo.

Il “sistema”

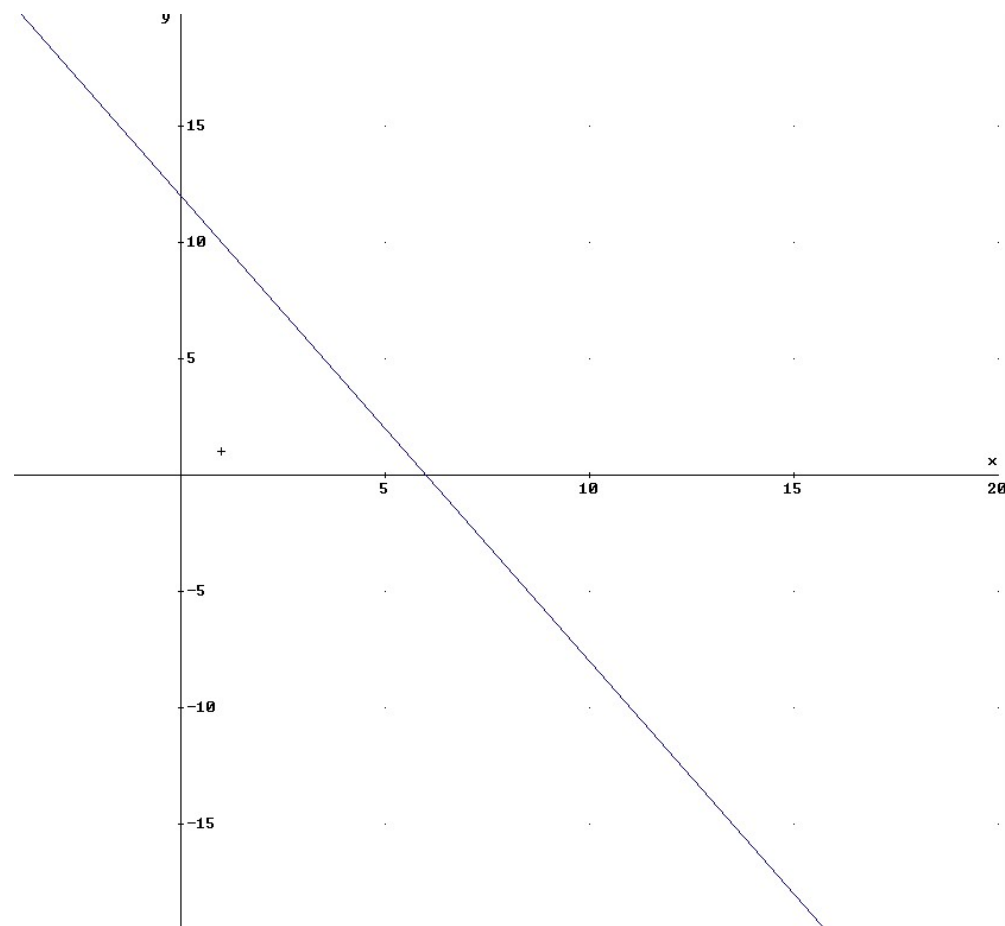
- Ciascuna delle condizioni può essere tradotta nel linguaggio algebrico con una disequazione:
le espressioni verbali “al massimo”, “non meno”,.... Vengono tradotte dai simboli di disuguaglianza.
- L’insieme delle disequazioni così ottenute deve però essere considerato nel suo complesso, interviene quindi il concetto di *sistema* per interpretare l’esigenza della ricerca di *soluzioni comuni a tutte le disequazioni*.

La formalizzazione

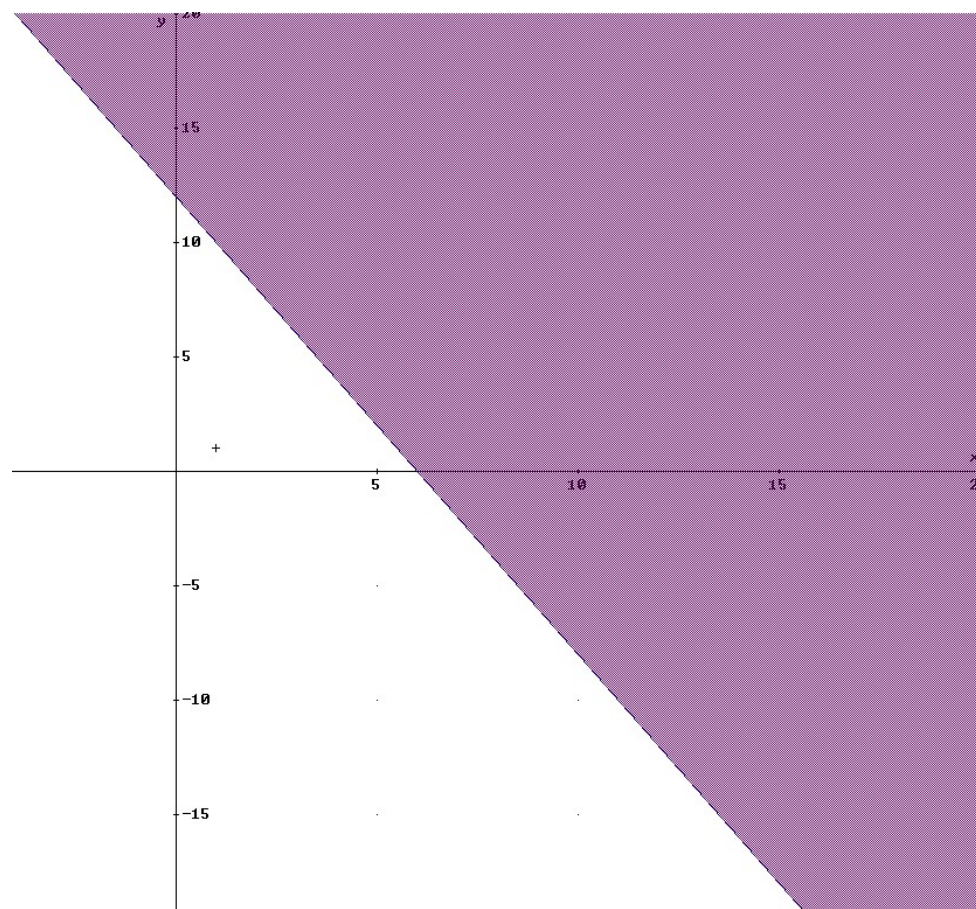
Un sistema di disequazioni in $\mathbb{N}$

$$\begin{cases} 10x + 5y \geq 60 \\ x \leq 5 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

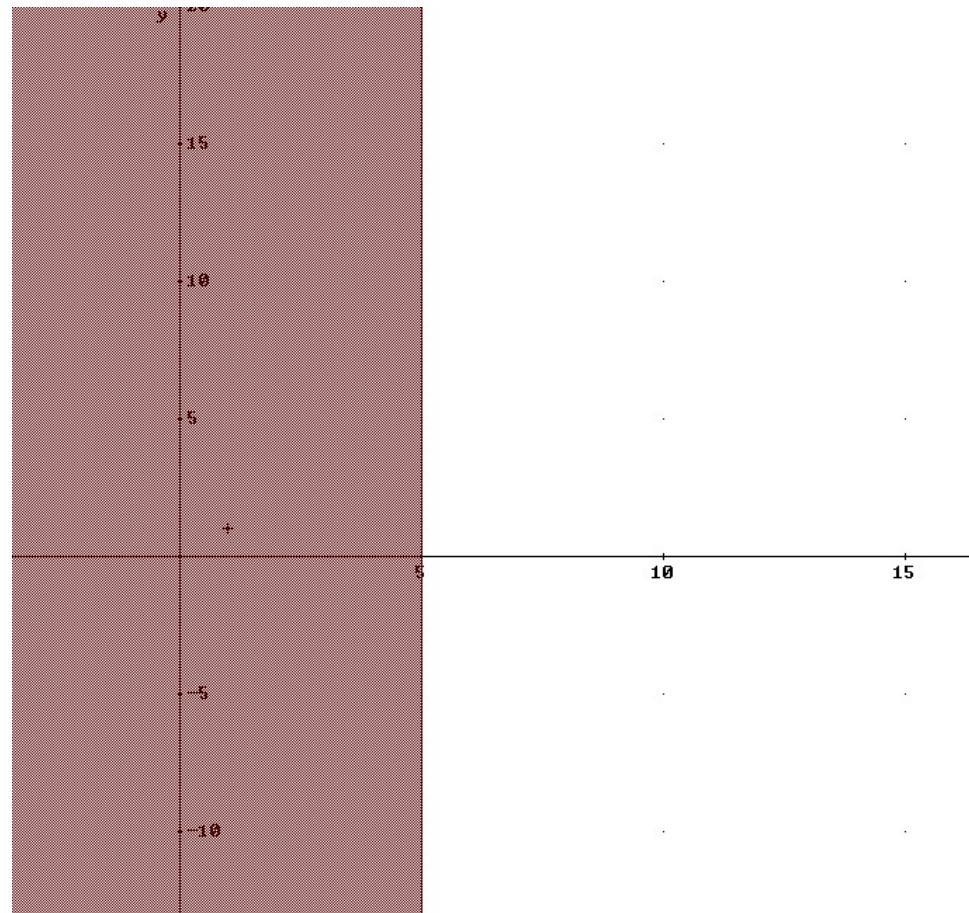
$$10x + 5y = 60$$



$$10x + 5y \geq 60$$

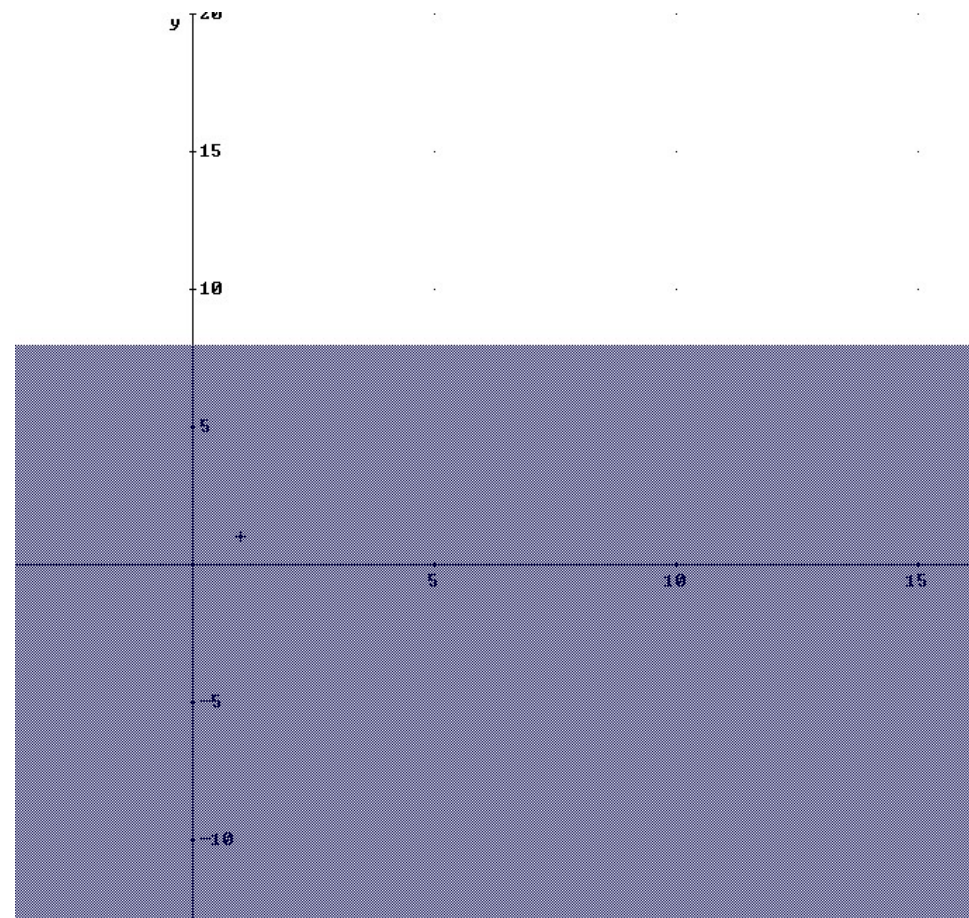


$$x \leq 5$$

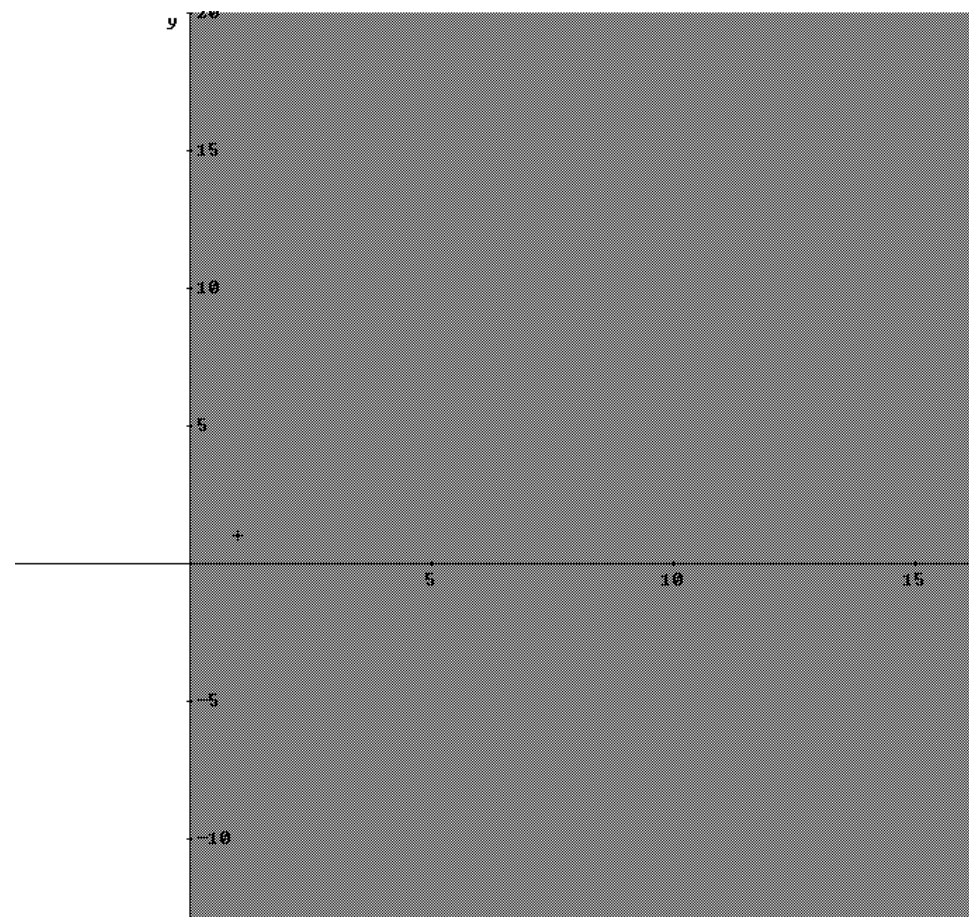


Iadeposa - 14/6/2024 - modelli
matematici

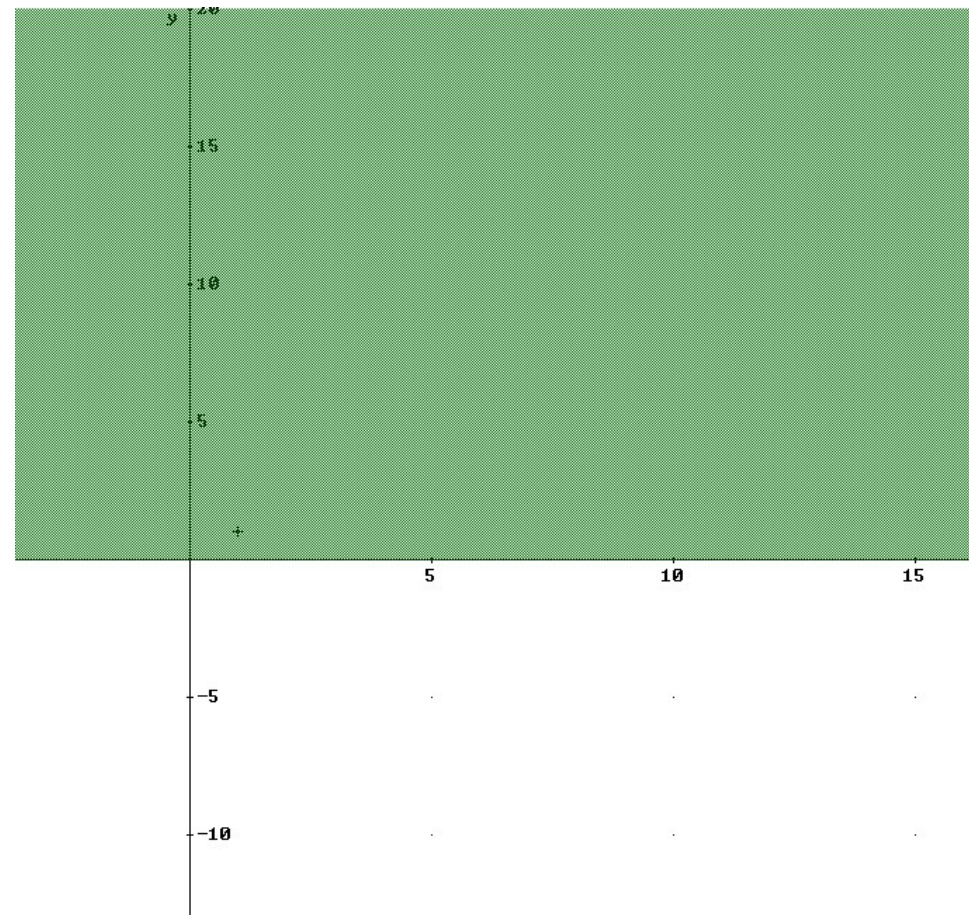
$$y \leq 8$$



$$x \geq 0$$



$$y \geq 0$$



Il modello

Intervengono in questa fase sia le conoscenze che le competenze:

- l'interpretazione grafica di disequazioni algebriche
- la determinazione della regione di piano rappresentata dal sistema di disequazioni

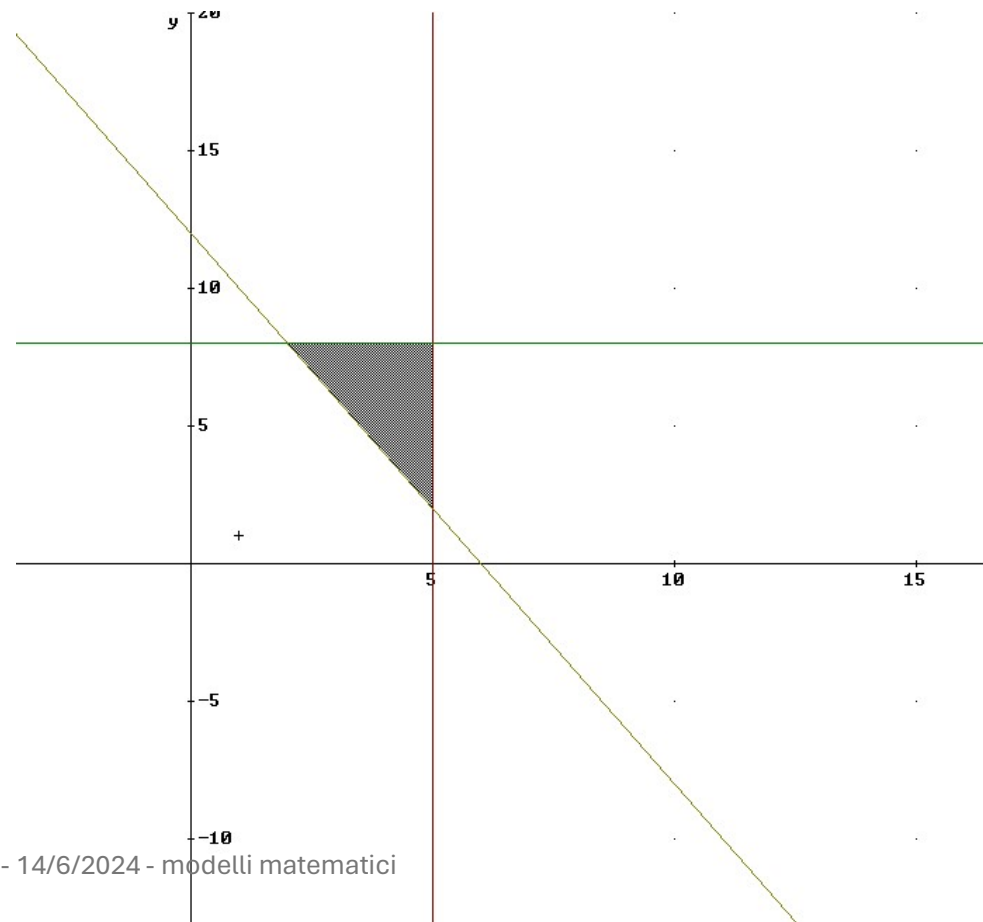
implica delle conoscenze sulla gestione del modello algebrico che è stato costruito.

E' richiesta però anche

- la capacità di riconoscere la regione di piano che individua la soluzione come l'insieme dei punti le cui coordinate rappresentano coppie possibili di valori per x e y che soddisfano i “vincoli” del problema, e quindi un ritorno consapevole alla situazione problematica, coordinando la situazione stessa e la sua interpretazione nel modello che è stato costruito.

$$10x + 5y \geq 60 \text{ e } x \leq 5 \text{ e } y \leq 8 \text{ e } \\ x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

le disuguaglianze evidenziate possono essere interpretate come disequazioni lineari in due variabili; pertanto esse sono rappresentate da semipiani che si intersecano: la parte comune costituisce la “**regione ammissibile**” per la soluzione del problema, cioè la regione di piano nella quale ha significato andare a ricercare la soluzione ottimale.



La funzione obiettivo

La funzione che rappresenta il costo totale giornaliero per i due furgoni, e che deve essere “ottimizzata” scegliendo il numero di viaggi per ciascun furgone, determinerà la soluzione più conveniente:

$$80x + 10y$$

OTTIMIZZARE

“ottimizzare” contiene in sé una certa varietà di significati,
è necessario interpretarla a seconda della situazione

I vari valori della spesa totale individuano tante rette,

$$80x + 10y = k,$$

al variare del valore k della spesa totale.

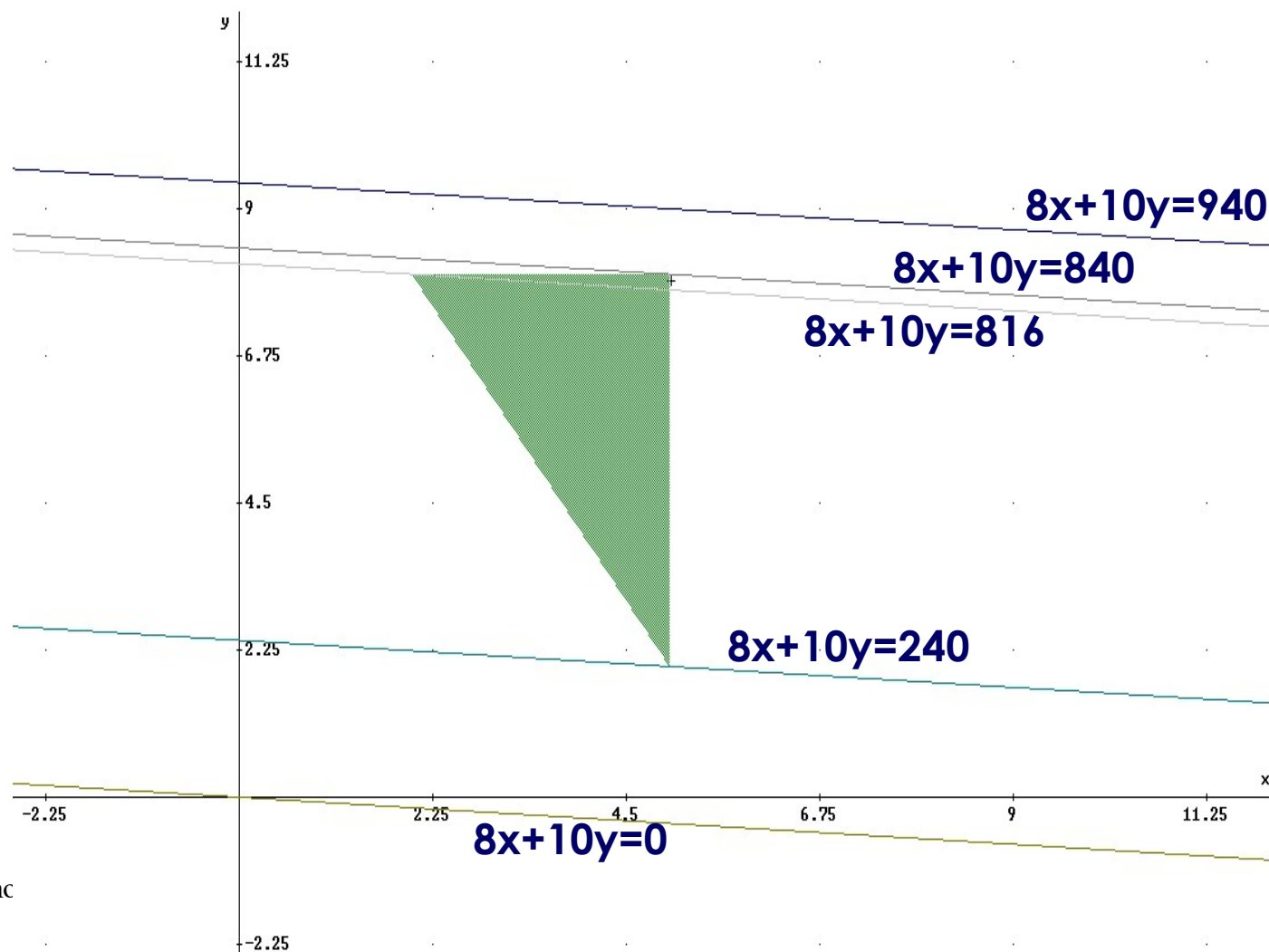
La funzione obiettivo

L'allievo può pervenire alla formalizzazione della funzione “spesa totale” solo se lo si fa passare attraverso la particolarezzazione di alcuni casi.

Una formalizzazione che introduca direttamente un parametro nella scrittura delle possibili spese ($80x + 10y = k$) crea sicuramente delle difficoltà nella sua comprensione e quindi nel suo riconoscimento riguardo al contesto interpretativo.

Il riconoscimento di tutti gli aspetti legati a ciascuna retta del fascio, rappresentata nella sua forma implicita, può costituire di per sé una vera e propria competenza.

La funzione obiettivo



La funzione obiettivo

Un punto P, sul contorno della regione, che rappresenta il valore ottimale (cioè più basso) della spesa

-> **doppia interpretazione** :

- **nel modello matematico** (si tratta del punto di intersezione delle rette che delineano il contorno della regione)
- **nella situazione problematica** (il valore della spesa in questo punto si ottiene sostituendo i valori della coordinate di P nella funzione che rappresenta il variare della spesa stessa).

La funzione obiettivo

Riconosciamo nella discussione di questi problemi due aspetti che sono da considerarsi sia costruttori, sia indicatori di competenza:

- il coordinamento dei vari registri di rappresentazione:
 - quello verbale della rappresentazione del problema
 - quello algebrico della sua formalizzazione
 - quello grafico cartesiano nella modellizzazione,...
- la continua necessità di traduzione e reinterpretazione, da un registro all'altro.

Questo richiede sia il controllo delle varie interpretazioni, sia la capacità di reinterpretare ciò che è stato modellizzato, non solo globalmente, ma certamente in diversi momenti a livello locale.

Ma non c'è solo il modello lineare

Il tempo del raffreddamento del caffè

LA LENTE MATEMATICA

RAFFREDDARE IL CAFFÈ CON LA MATEMATICA



Un modello esponenziale

il modello di scambio termico (trasferimento di calore) noto come legge di Newton del raffreddamento / riscaldamento (Newton's law of cooling / heating):

$$T(t) = T_s + (T_o - T_s) e^{-kt}$$

t = tempo

$T(t)$ = temperatura del corpo al tempo t

T_s = temperatura dell'ambiente (ad esempio la sala da pranzo, un frigo, una camera climatica)

T_o = Temperatura iniziale del corpo (una tazzina di caffè, una zuppa, una braciola ai ferri, la lasagna della domenica ,...)

k = costante

Il tempo di raffreddamento non ha un andamento lineare ma esponenziale

“cooling_coffee”: supponiamo di avere appena preparato il nostro caffè pomeridiano partendo da acqua calda e caffè liofilizzato. La temperatura iniziale risulta essere pari a $70,82^{\circ}\text{C}$. La Temperatura della stanza dove viene riposto il caffè, è pari a $22,0^{\circ}\text{C}$ (assumiamo che la Temperatura dell'ambiente si mantenga costante). Dopo **115 minuti** (quasi 2 ore) la Temperatura del caffè' risulta essere pari a $25,03^{\circ}\text{C}$.

Dopo avere calcolato la costante k ,

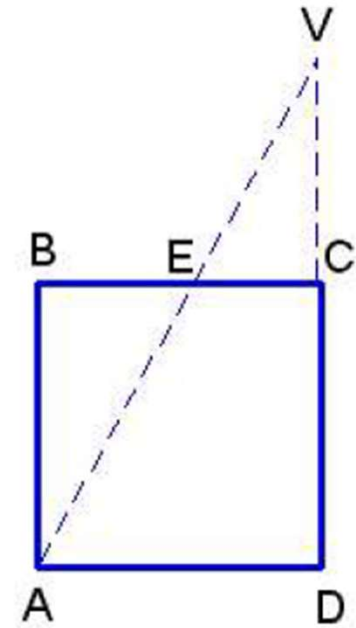
- *stimare dopo quanto tempo il caffè risulta avere una Temperatura di $49,08^{\circ}\text{C}$*
- *stimare la Temperatura raggiunta dal caffè dopo 11 minuti*

Un modello dalla geometria...

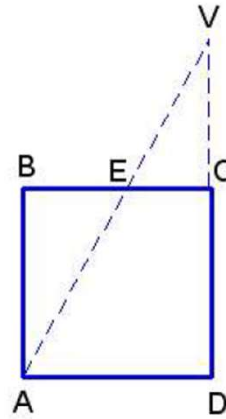
Il matematico Leonardo Pisano, detto Fibonacci (Pisa, 1170-1250), aveva trovato un modo semplice ed efficace per stimare le distanze. Si serviva di una cornice quadrata ABCD di lato unitario con il lato BC graduato.



Sistemati i lati AD e BC in posizione orizzontale, Leonardo traguardava la cima V di una montagna attraverso il vertice D fino ad allineare il vertice C con i punti V e D. Successivamente, tenendo fermo la cornice, spostando il punto di visuale, traguardava la cima V attraverso il vertice A, individuando un punto E (allineato con i punti V ed A) sul lato graduato BC. La lettura della lunghezza del segmento BE gli permetteva di stimare la distanza CV ovvero la distanza della cima della montagna dall'osservatore.



N.B. [traguardare = guardare un punto lontano attraverso punti fissi, segni o tacche di un dispositivo di mira, montato su uno strumento, allo scopo di dare a quest'ultimo l'esatta direzione (dizionario on-line Hoepli)]



Svolgimento. Consideriamo i due triangoli rettangoli ABE e EVC , poiché gli angoli in E sono uguali in quanto opposti al vertice, i due triangoli hanno gli angoli a due a due congruenti e quindi sono simili. Tenuto conto che il quadrato ha lato unitario, si deduce che

$$\overline{CV} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{BE} \Rightarrow \overline{VC} = \frac{1 - \overline{BE}}{\overline{BE}}$$